Letmý úvod do teorie afinních prostorů

Třetí pracovní verze

Cílem tohoto textu je popsat akce grup na množinách, definovat abstraktní afinní prostor jakožto množinu se strukturou danou akcí zaměření, charakterizovat afinní prostory pomocí isomorfních afinních prostorů speciálního tvaru, popsat afinní báze, afinní souřadnice, dále pak báze bodů v obecné poloze a souřadnice souřadnice vzhledem k těmto bazím. Dále definujeme afinní zobrazení a afinní grupu a ukážeme, jak operuje na souřadnicích a bazích.

Motivační příklad: Nechť $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení zadané předpisem

$$f(ax^2 + bx + c) = a + c.$$

Označme symbolem P vzor $6 \in \mathbb{R}$, tedy

$$P = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]; a + c = 6\} = f^{-1}(6).$$

Povšimněme si, že pro každý prvek $p \in P$ a každý vektor z jádra $u \in \ker f = f^{-1}(0)$ platí $p + u \in P$ a pro každé $v \in \mathbb{R}_2[x] - \ker f$ platí $p + v \notin P$. Dále pro každé $p, q \in P$ je $p - q \in \ker f$.

Díky vlastnostem vektorového prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ navíc zřejmě platí následující na první pohled nezajímavé vlastnosti

$$\forall p \in P \forall u, v \in \ker f : (p + u) + v = p + (u + v) \tag{1}$$

$$\forall p \in P : p + 0 = p \tag{2}$$

$$\forall p \in P \forall u \in \ker f : (p + u = p \implies u = 0) \tag{3}$$

$$\forall p, q \in P \exists! u \in \ker f : p + u = q \tag{4}$$

Ukážeme, že množina $P \subseteq \mathbb{R}_2[x]$ je typem velice důležité struktury.

1. Akce grup

Definice. Buď $A \neq \emptyset$, $(G, \cdot)$ grupa. Pak zobrazení $\star : A \times G \to A$ nazveme *akce grupy G na množině A* a zapisujeme symbolicky jako $a \star g = \star(a, g)$, pokud splňuje vlastnosti

$$\forall a \in A \forall g, h \in G : (a \star g) \star h = a \star (g \cdot h) \tag{5}$$

$$\forall a \in P : a \star 1 = a \tag{6}$$

Pokud je z kontextu zřejmé, o jakou akci jde, říkáme stručně, že G *operuje* na A.

Poznámka. Výše uvedená definice je vlastně definicí *pravé* akce. Pokud bychom nahradili vlastnost 5 vlastností

$$\forall a \in A \forall g, h \in G : (a \star g) \star h = a \star (h \cdot g) \tag{7}$$

budeme zobrazení $\star$ nazývat *levou akcí*. Pro komutativní grupy ztratí toto rozlišování smysl. Tvrdošíjné lpění na pravých akcích je v mnoha níže uvedených příkladech nevhodné, ale považujeme pečlivé rozlišování za účelné a doufáme, že si čtenář rozdíl uvědomí a zapamatuje.

Příklad 1. Buď $A = \{a\}$, $G = \{1\}$. Pak lze definovat jediné zobrazení $\star : A \times V \to A$, které je akcí G na A. Obecněji, je-li A libovolná neprázdná množina, má na ní triviální grupa $G = \{1\}$ jedinou akci. Podobně, je-li G libovolná grupa, má jedinou akci na množině $A = \{a\}$. Všechny tyto případy lze zobecnit následovně: Je-li A libovolná neprázdná množina a G libovolná grupa, lze definovat akci $\star : A \times G \to A$ předpisem $a \star g = a$ pro každé $a \in A$ a každé $g \in G$. Této akci budeme říkat *triviální akce.* Povšimněte si, že triviální akce je pravou i levou akcí zároveň, ačkoli grupa G nemusí být komutativní.

Příklad 2. Buď G grupa. Pak zobrazení $\star : G \times G \to G$ zadané $g \star h = g \cdot h$ je akce G na $A = G$. Pokud je G komutativní grupa, je $\star$ i levá akce.

Příklad 3. Buď V vektorový prostor nad polem $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Pak grupa $(\mathbb{K} - \{0\}, \cdot)$ má akci na V zadanou násobením vektoru $v \in V$ skalárem $a \in \mathbb{K} - \{0\}$.

Příklad 4. Buď $A = \{1, 2, 3\}$ tříprvková množina a S_3 grupa permutací množiny A, tedy

$$S_3 = \{\pi : A \to A; \pi \text{ je surjekce}\}.$$

Definujme zobrazení $\star : A \times S_3 \to A$ následovně: pro každé $a \in A$ a každé $\pi \in S_3$ nechť $a \star \pi = \pi^{-1}(a)$. Přesvědčte se, že $\star$ je akce S_3 na A. Při definici $a \star \pi = \pi(a)$ nedostaneme akci, ale levou akci.

Povšimněte si, že předchozí příklad nám dává odlišný pohled na akce grup: Nechť $(G, \cdot)$ je grupa a A neprázdná množina. Nechť je dán grupový homomorfismus $\phi : G \to \mathbb{S}(A)$ grupy G do grupy permutací množiny A. Pak lze definovat zobrazení $\star_\phi : A \times G \to A$ předpisem $a \star_\phi g = \phi(g)(a)$, kde symbol vpravo označuje hodnotu permutace $\phi(g)$ na prvku $a \in A$.

Protože ϕ je homomorfismus grup, platí pro každé $a \in A$ a každé $g, h \in G$

$$\begin{aligned}
(a \star_\phi g) \star_\phi h &= \phi(h)\big(a \star_\phi g\big) = \big(\phi(h) \circ \phi(g)\big)(a) = \phi(h \cdot g)(a) \\
&= a \star_\phi (h \cdot g) \\
(a \star_\phi 1) &= \phi(1)(a) = \mathrm{id}(a) = a
\end{aligned}$$

Povšimněte si, že takto definovaná $\star_\phi$ není akcí, ale levou akcí. Abychom vyhověli definici akce, definujme $\star_\phi$ odlišně: nechť $a \star_\phi \pi = \pi^{-1}(a)$. Pak je podobně jako v příkladu výše $\star_\phi$ akcí.

Povšimněte si naopak, že každá akce $\star : A \times G \to A$ pro libovolnou neprázdnou množinu A a libovolnou grupu G zadává grupový homomorfismus $\phi_\star : G \to \mathbb{S}(A)$ zadaný pro každé $g \in G$ předpisem $\phi_\star(g)(a) = a \star g^{-1}$ pro každé $a \in A$.

Cvičení. Dokažte, že $\phi_\star$ je homomorfismus.

Cvičení. Dokažte, že pro každé $A \neq \emptyset$, každou grupu G, každou akci $\star : A \times G \to A$ a každý homomorfismus $\phi : G \to \mathbb{S}(A)$ platí $\star_{\phi_\star} = \star$ a $\phi_{\star_\phi} = \phi$. Tato dvě tvrzení znamenají, že akce G na A a příslušný homomorfismus $G \to \mathbb{S}(A)$ se navzájem jednoznačně určují.

Cvičení. Ilustrujme tyto úvahy na předchozím příkladu: akce $\star : \{1,2,3\} \times S_3 \to \{1,2,3\}$ určuje homomorfismus $\phi_\star : S_3 \to \mathbb{S}(\{1,2,3\}) \simeq S_3$. Popište tento homomorfismus a povšimněte si, že pro levou akci $a * \pi = \pi(a)$ je θ_* identita a že naopak identita určuje akci $*$.

Cvičení. Problém „opačného komutování“ a nutnosti přejít od (pravých) akcí k levým akcím lze vyřešit zavedením pojmu *antihomomorfismus.* Pokuste se tento pojem přesně definovat a přeformulujte s jeho využitím předchozí úvahy pro (pravé) akce. Uvědomte si, že antihomomorfismy komutativních grup splývají s homomorfismy. Nechť $\phi : G \to H$ je homomorfismem i antihomomorfismem grup. Rozhodněte, zda z toho plyne komutativita G nebo H a své rozhodnutí zdůvodněte.

Buď G libovolná grupa a A libovolná neprázdná množina, $\star : A \times G \to A$ libovolná akce. Potom zúžení $\star$ na libovolnou podgrupu $H \subseteq G$ zadává akci $\star|H : A \times H \to A$. Specielně pro podgrupu $\{1\} \subseteq G$ jde o triviální akci.

Příklad 5. Uvažme $A_3 \subseteq S_3$ a akci $\star|A_3 : \{1,2,3\} \times A_3 \to \{1,2,3\}$. Protože $A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$ a tříprvková množina je se $\mathbb{Z}_3$ v bijekci, můžeme akci $\star|A_3$ chápat jako akci $\overline{\star} : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ zadanou sčítáním v $\mathbb{Z}_3$.

Nechť $A = \{1,2,3\}$ a $G = S_3$. Definujme dvě akce S_3 na A: nechť $a \star \pi = \pi^{-1}(a)$ a $a \overline{\star} \pi = a$. Tyto dvě akce představují určité protipóly — zatímco $\star$ je až příliš bohatá akce, triviální akce $\overline{\star}$ je příliš omezená. Tato vágní vyjádření získají rozumný smysl po zformulování následující

Definice. Buď A neprázdná množina a $(G,\cdot)$ grupa. Řekneme, že akce $\star : A \times G \to A$ grupy G na množině A je *bez pevných bodů*, pokud pro každé $a \in A$ a každé $g \in G$ platí

$$a \star g = a \implies g = 1. \tag{8}$$

Pokud existuje $a \in A$, pro které tato podmínka není splněna, nazveme ho *pevným bodem akce* $\star$.

Řekneme, že akce $\star$ je *tranzitivní*, pokud pro každé $a, b \in A$ existuje $g \in G$ takové, že

$$a \star g = b. \tag{9}$$

Příklad 6. Triviální akce je bez pevných bodů právě tehdy, když G je triviální, naopak triviální akce libovolné grupy je tranzitivní právě tehdy, když A je jednoprvková množina.

To znamená, že podmínka 8 říká, že akce grupy G není vzhledem k množině A „moc velká“, naopak podmínka 9 znamená, že akce grupy je dostatečná na to, aby se každý prvek množiny A pomocí akcí prvků grupy G přesunul na libovolný jiný prvek množiny A. Specielně si uvědomte, co to znamená pro akci z příkladu 2.

Příklad 7. Využijme k popisu akce $\star : A \times G \to A$ antihomomorfismus $\phi_\star : G \to \mathbb{S}(A)$. Srovnejte podmínku 8 a injektivitu $\phi_\star$, tj. podmínku

$$\forall g, h \in G : \phi_\star(g) = \phi_\star(h) \implies g = h.$$

Tu lze přeformulovat do ekvivalentního tvaru

$$\forall g, h \in G\big(\forall a \in A(a \star g = a \star h) \implies g = h\big)$$

Tato podmínka je slabší než 8! Najděte vhodný příklad akce s pevným bodem, jejíž příslušný antihomomorfismus je injektivní. (Takový příklad lze nalézt i v předešlém textu.)

Příklad 8. Dokažte, že pro tranzitivní akci bez pevných bodů $\star : A \times G \to A$ je splněna silnější vlastnost než 9 — pro každé $a, b \in A$ existuje právě jedno $g \in G$ takové, že $a \star g = b$.

Příklad 9. Akce $\star : \{1, 2, 3\} \times S_3 \to \{1, 2, 3\}$ z příkladu 4 je tranzitivní, ale všechny body množiny $\{1, 2, 3\}$ jsou pevné, neboť každý bod se zobrazí na sebe při transpozici ostatních dvou bodů.

Příklad 10. Akce z příkladu 3 má právě jeden pevný bod, $0 \in V$. Uvědomte si, že nulový vektor splňuje silnější podmínku, než je podmínka z definice pevného bodu — zatímco v předchozím příkladu se každý bod A při některé permutaci „pohnul“, nulový vektor zůstává na místě při násobení libovolným skalárem.

Z tohoto důvodu tato akce není tranzitivní, neboť z nulového vektoru se na žádný jiný vektor nedostaneme násobením jakýmkoli skalárem. Kdybychom nulový vektor z V vynechali, stále ještě nemusíme dostat tranzitivní akci — přesněji, tranzitivní akci dostaneme právě tehdy, je-li $\dim V = 1$.

2. Afinní prostor

Definice. Nechť A je neprázdná množina a V vektorový prostor nad polem skalárů $\mathbb{K}$. Řekneme, že trojice $(A, V, \star)$ je *afinní prostor*, jestliže $\star : A \times V \to A$ je tranzitivní akce V na A bez pevných bodů. Prvky množiny A nazýváme *body* afinního prostoru a množinu A nazýváme *množinou bodů*, vektorový prostor V nazýváme *zaměření* afinního prostoru. Pokud je z kontextu zřejmé zaměření a jeho akce na množině bodů A, stručně mluvíme o afinním prostoru A.

Příklad 11. Trojice $(\{a\}, \{1\}, \star)$ je afinní prostor. Vzhledem k příkladu 6 víme, že je to jediný afinní prostor s triviální akcí $\star$.

Příklad 12. Buď V vektorový prostor. Pak $(V, V, +)$, kde $+$ je sčítání vektorů ve V, je afinní prostor. Tento příklad je speciálním případem z příkladu 2.

Příklad 13. Množina P z motivačního příkladu s akcí $\ker f$ danou sčítáním vektorů tvoří afinní prostor — $\ker f$ je vektorový prostor a vlastnosti 1–4 popisují tranzitivní akci $\ker f$ bez pevných bodů na množině P.

Příklad 14. Nechť M je matice typu $m \times n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Označme

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n; Mx = b\}$$

množinu řešení soustavy lineárních rovnic s rozšířenou maticí soustavy $(M|b)$, dále označme

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n; Mx = 0\}$$

množinu řešení homogenizované soustavy. Potom $(A, V, +)$, kde $+ : A \times V \to A$ je sčítání vektorů v $\mathbb{R}^n$, je afinní prostor.

Skutečně, množina $V \subseteq \mathbb{R}^n$ je vektorový podprostor, neboť je řešením homogenní soustavy lineárních rovnic. Dále pro každé $a \in A$ a každé $v \in V$ je $a + v \in A$, tedy $+$ je skutečně zobrazení $+ : A \times V \to A$. Z vlastností sčítání vektorů v $\mathbb{R}^n$ plyne, že je to akce V na A a že je také bez pevných bodů a tranzitivní.

Příklad 15. Buď $f : U \to V$ lineární zobrazení, $v \in \operatorname{Im} f$ libovolný vektor. Pak

$$f^{-1}(v) = \{u \in U; f(u) = v\}$$

je množinou bodů afinního prostoru $(f^{-1}(v), \ker f, +)$. Skutečně, pro každé $u \in f^{-1}(v)$ a každé $w \in \ker f$ platí $u + w \in f^{-1}(v)$, neboť $f(u + w) = f(u) + f(w) = v + 0 = v$. Podobně jako v předchozím příkladu lze snadno ukázat, že sčítání vektorů definuje akci $\ker f$ na f^{-1}, která je tranzitivní a bez pevných bodů.

Předchozí příklad je speciálním případem, přičemž $U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$ a zobrazení $f : U \to V$ je zadáno předpisem $f(x) = Mx$. Pak zřejmě množina A z předchozího případu představuje vzor $b \in \mathbb{R}^m$ a množina V je jádrem f.

Nechť naopak $f : U \to V$ je libovolné lineární zobrazení mezi prostory konečné dimenze. Zvolme libovolné báze α v U a β ve V. Pak pro $v \in \operatorname{Im} f$ je množina

$$f^{-1}(v) = \{u \in U; (f)_{\beta\alpha}(u)_\alpha = (v)_\beta\}$$

neboli vzor v odpovídá bodům z U, jejichž souřadnice v bázi α jsou řešením nehomogenní soustavy lineárních rovnic s rozšířenou maticí soustavy $\big((f)_{\beta\alpha}|(v)_\beta\big)$ a podobně $\ker f$ je zadáno homogenizovanou soustavou s maticí soustavy $\big((f)_{\beta\alpha}\big)$.

Tedy tento a přechozí příklad popisují stejný typ afinních prostorů.

Příklad 16. Trojice $(\{1, 2, 3\}, S_3, \star)$, kde $\star$ je akce definovaná v příkladu 4, není afinní prostor, neboť $\star$ má jako pevné body všechny body $\{1, 2, 3\}$. Z příkladu 5 ale víme, že zúžení $\star$ na $A_3 \subseteq S_3$ je akcí bez pevných bodů. Protože $A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_3$ je vektorový prostor nad sebou samým, je $(\{1, 2, 3\}, A_3, \star|A_3)$ afinní prostor.

Tutéž úvahu nelze provést pro obdobnou akci S_4 na čtyřprvkové množině, protože $\mathbb{Z}_4$ není pole. (Navíc $A_4 \not\simeq \mathbb{Z}_4$, ale to nevadí, protože $\mathbb{Z}_4$ je isomorfní podgrupě S_4 generované posunutím.)

Příklad 17. Nechť $p = \{[a, b] \in \mathbb{R}^2; b = ka + l\}$ je přímka v rovině, $k, l \in \mathbb{R}$ libovolná. Na p definujme zobrazení $\star : p \times \mathbb{R}^2 \to p$ předpisem $[a, b] \star (x, y) = [a + x, b + y]$. Přesvědčte se, že jde o tranzitivní akci. Trojice $(p, \mathbb{R}^2, \star)$ ale není afinní prostor. Nalezněte všechny pevné body akce $\star$.

Podobně nechť $A = \mathbb{R}^2$ a $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = kx\}$, definujme zobrazení $\star : A \times V \to A$ předpisem $[a, b] \star (x, y) = [a + x, b + y]$. Přesvědčte se, že jde o akci bez pevných bodů, která ale není tranzitivní.

Předchozí příklad ukazuje smysl následující

Definice. *Dimenzí afinního prostoru* $(A, V, \star)$ nazveme dimenzi zaměření V.

Poznámka. Povšimněte si, jak se v příkladu 17 projevil princip popsaný v příkladu 6 — tranzitivita akce vyžaduje „dost velkou“ dimenzi V, absence pevných bodů zase znemožňuje, aby dimenze V byla „příliš velká“.

Příklad 18. Buď A čtyřprvková množina. Vzhledem k příkladu 16 víme, že akce $\mathbb{Z}_4$ na A není afinní prostor. To ale neznamená, že na čtyřprvkové množině nelze definovat strukturu afinního prostoru. Uvědomte si, že A je v bijekci se $(\mathbb{Z}_2)^2$, tedy s dvourozměrným vektorovým prostorem nad polem $\mathbb{Z}_2$, a můžeme definovat akci $(\mathbb{Z}_2)^2$ na A jako sčítání v $(\mathbb{Z}_2)^2$. Dimenze tohoto afinního prostoru je 2. Na A lze ale zavést také jinou afinní strukturu, ovšem s využitím teorie konečných polí. Lze ukázat, že existuje čtyřprvkové pole $\mathbb{L}$, to je pak vektorovým prostorem dimenze 1 nad sebou samým, takže lze definovat afinní strukturu $(\mathbb{L}, \mathbb{L}, +)$. Přitom $\mathbb{L} = \{0, 1, \ell, \ell + 1\}$, kde $1 + 1 = 0$, $\ell + \ell = 0$ a $\ell \cdot \ell = \ell + 1$.

Pokuste se najít afinní strukturu šestiprvkové množiny. (Později ukážeme, na jakých konečných množinách lze definovat strukturu afinního prostoru.)

Bez znalosti o konečných polích a pouze s využitím elementární teorie množin lze ukázat existenci různých afinních struktur nekonečných množin. Nechť A je pro jednoduchost spočetná, pak A je v bijekci s $A \times A$ a zároveň A je v bijekci s $\mathbb{Q}$, tedy lze definovat akci $\star$ vektorového prostoru $\mathbb{Q}$ na A. Ta ale zadává akci $\mathbb{Q}^2$ na $A \times A$ po složkách. Prostřednictví bijekce mezi A a $A \times A$ je tím ale zadána akce $\mathbb{Q}^2$ na A.

Podobné úvahy lze provést i pro nespočetné množiny.

Cvičení. Vyzkoušejte si zavedení struktury jedno- a dvourozměrného afinního prostoru na množině celých čísel s využitím klasické diagonální bijekce $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$.

Definice. Nechť $(A, V, \star)$ je afinní prostor, nechť $\emptyset \neq B \subseteq A$, $W \subseteq V$ je vektorový podprostor a zúžení akce $\star$ na podprostor W je tranzitivní akcí W na B bez pevných bodů. Pak trojici $(B, W, \star|W)$ nazveme *afinním podprostorem* prostoru $(A, V, \star)$.

Příklad 19. Nechť $(A, V, \star)$ je afinní prostor a $a \in A$ libovolný bod. Pak $(a, \{0\}, \star|\{0\})$ je nularozměrný afinní podprostor.

Cvičení. Dokažte, že neprázdný průnik afinních podprostorů je afinní podprostor.

Vzhledem k příkladu 12 lze uvažovat afinní podprostory vektorového prostoru, přesněji řečeno afinní podprostory afinního prostoru $(V, V, +)$. Víme, že každý vektorový podprostor, tj. každé možné zaměření afinního prostoru, lze chápat jako řešení vhodné homogenní soustavy lineárních rovnic a nebo ekvivalentně jako jádro vhodného lineárního zobrazení. Vzhledem k příkladům 14 a 15 víme, že řešení nehomogenních soustav lineárních rovnic, nebo ekvivalentně vzory prvků různých od nuly z obrazu vhodných lineárních zobrazení, jsou afinní podprostory vektorového prostoru. Než v příští kapitole prozkoumáme, zda existují také jiné afinní podprostory vektorového prostoru, popíšeme geometrii vzájemných poloh afinních podprostorů v $(V, V, +)$.

Definice. Nechť $(V, V, +)$ je afinní prostor a $(A, W, +)$, $(B, U, +)$ jeho afinní podprostory, tj. $A, B \subseteq V$ a $W, U \subseteq V$ vektorové podprostory. Pak řekneme, že $(A, W, +)$ a $(B, U, +)$ jsou

(1) *rovnoběžné*, pokud $W \subseteq U$ nebo $U \subseteq W$,
(2) *mimoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné a $A \cap B = \emptyset$,
(3) *různoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné ani mimoběžné.

Takto tedy chápeme situaci $A \subseteq B$ jako rovnoběžnost.

Příklad 20. Nechť $V = \mathbb{K}^n$, $A = \{x \in V; Mx = a\}$, $B = \{x \in V; Nx = b\}$, kde matice M a N jsou typu $m \times n$ a $k \times n$, $a \in \mathbb{K}^m$, $b \in \mathbb{K}^k$. Označme $W = \{x \in V; Mx = 0\}$ a $U = \{x \in V; Nx = 0\}$. Afinní podprostory $(A, W, +)$ a $(B, W, +)$ ve $(V, V, +)$ jsou různoběžné, pokud soustava lineárních rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{c|c} M & a \\ N & b \end{array}\right)$$

má řešení. Pokud řešení nemá, ale příslušná homogenizovaná soustava má stejnou množinu řešení jako některá ze soustav $Mx = 0$ nebo $Nx = 0$, jsou $(A, W, +)$ a $(B, U, +)$ rovnoběžné. V ostatních případech jsou mimoběžné.

Definice. Afinní podprostor prostoru $(V, V, +)$ dimenze $\dim V - 1$ nazveme *nadrovina ve* V.

Cvičení. Dokažte, že každý afinní podprostor $(V, V, +)$ tvaru $(A, W, +)$, kde $A = \{x \in V; Mx = a\}$, $W = \{x \in V; Mx = 0\}$ je průnikem konečně mnoha nadrovin.

Na závěr této části uvedeme ekvivalentní definici afinního prostoru, která bude v dalším textu užitečná.

Tvrzení. *Nechť A je neprázdná množina, V vektorový prostor a $\vec{\ } : A \times A \to V$ je zobrazení, které zapisujeme $\overrightarrow{ab} = \vec{\ }(a, b)$, s těmito dvěma vlastnostmi:*

(i) *Pro každé $a \in A$ a $v \in V$ existuje právě jedno $b \in A$ tak, že $\overrightarrow{ab} = v$. Píšeme $b = a + v$, případně $v = b - a$.*
(ii) *Pro všechna $a, b, c \in A$ je $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$.*

Pak $(A, V, \star)$, kde $a \star v$ definujeme jako právě to $b \in A$, pro které platí $\overrightarrow{ab} = v$, je afinní prostor, a naopak, pro každý afinní prostor $(A, V, \star)$ lze definovat zobrazení $\vec{\ } : A \times A \to V$ splňující vlastnosti (i) *a* (ii).

Cvičení. Dokažte předchozí tvrzení.

3. Afinní zobrazení

Poznámka. V celé této a příští kapitole předpokládáme, že zaměření všech afinních prostorů jsou vektorovými prostory nad týmž polem, pokud nebude řečeno jinak. Jedině tak má totiž smysl mluvit o lineárních zobrazeních mezi nimi. Kategoriálně orientovaný čtenář nechť si uvědomí, že vektorové prostory nad polem $\mathbb{K}$ a lineární zobrazení mezi nimi tvoří právě kategorii Mod-$\mathbb{K}$, přičemž víme, že kategorii Mod modulů nad libovolnými okruhy rozumně vytvořit nelze.

Definice. Nechť $(A, V, \star)$ a $(B, W, *)$ jsou afinní prostory a $f : A \to B$ zobrazení takové, že existuje lineární zobrazení $\phi : V \to W$ splňující pro každé $a \in A$ a každé $v \in V$

$$f(a \star v) = f(a) * \phi(v).$$

Pak zobrazení f nazveme *afinním zobrazením* prostoru $(A, V, \star)$ do prostoru $(B, W, *)$, příslušné zobrazení $\phi : V \to W$ nazveme *podřízeným lineárním zobrazením* afinního zobrazení f.

Nechť speciálně afinní zobrazení $f : A \to B$ je bijekce. Pak řekneme, že f je *afinní isomorfismus* nebo že prostory $(A, V, \star)$ a $(B, W, *)$ jsou *afinně isomorfní*.

Příklad 21. Konstantní zobrazení $(A, V, \star)$ do $(B, W, *)$ je afinní. Podobně vložení afinního podprostoru do afinního prostoru je afinní zobrazení, dokonce lze ekvivalentně definovat afinní podprostor $(C, U, \star|U)$ afinního prostoru $(A, V, \star)$ tak, že $C \subseteq A$, existuje vhodné zúžení $\star$ na $U \subseteq V$ a inkluze $C \hookrightarrow A$ je afinní zobrazení.

Příklad 22. Mezi afinními prostory $(V, V, +)$ a $(W, W, +)$ každé lineární zobrazení $\phi : V \to W$ indukuje afinní zobrazení f splňující $f(0) = 0$.

Lemma. *Nechť $(A, V, \star)$, $(B, W, *)$ a $(C, U, \diamond)$ jsou afinní prostory, $f : A \to B$ a $g : B \to C$ afinní zobrazení s podřízenými lineárními zobrazeními $\phi : V \to W$ a $\psi : W \to U$. Pak $g \circ f : A \to C$ je afinní zobrazení s podřízeným lineárním zobrazením $\psi \circ \phi : V \to U$.*

Cvičení. Dokažte předchozí tvrzení.

Cvičení. Nechť $(C, U, \star|U)$ je afinní podprostor v $(A, V, \star)$, $(B, W, *)$ afinní prostor a $f : A \to B$ afinní zobrazení s podřízeným lineárním zobrazením $\phi : V \to W$. Dokažte, že $\big(f(C), \phi(U), *|\phi(U)\big)$ je afinní podprostor v $(B, W, *)$. Zformulujte přesně obdobné tvrzení pro vzor afinního podprostoru v afinním zobrazení a také je dokažte.

Cvičení. Pro lineární zobrazení $f : V \to W$ platí $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$. Nechť $(A, V, \star)$ a $(B, W, *)$ jsou afinní prostory a $f : A \to B$ afinní zobrazení. Rozmyslete si, zda platí nějaká analogie tvrzení o dimenzích vektorových prostorů. Lze smysluplně definovat $\ker f$?

Cvičení. Dokažte, že podřízené lineární zobrazení afinního isomorfismu je invertibilní, tj. že je to lineární isomorfismus.

Cvičení. Dokažte s využitím předešlého cvičení, že inverzní zobrazení k afinnímu isomorfismu je afinní isomorfismus.

Důsledek. *Isomorfní afinní prostory mají stejnou dimenzi.*

Definice afinního isomorfismu umožňuje říci, kdy jsou dva afinní prostory z hlediska afinní struktury stejné. Následující věta ukazuje, že mezi afinními prostory lze vybrat vhodné reprezentanty ve třídách ekvivalence afinního isomorfismu a ukazuje, že tyto třídy jsou charakterizovány dimenzí.

Věta. *Nechť $(A, V, \star)$ je libovolný afinní prostor. Pak existuje afinní isomorfismus $f : A \to V$ do afinního prostoru $(V, V, +)$.*

Důkaz. Zvolme pevně libovolný bod $a \in A$. Pro každé $b \in A$ položme $f(b) = \overrightarrow{ab}$ (povšimněte si, že zde využíváme ekvivalentní definici afinního prostoru). Dokážeme, že takto definované zobrazení je afinním isomorfismem.

Především podřízené lineární zobrazení k f je $\mathrm{id} : V \to V$, neboť pro každé $b \in A$ a každý vektor zaměření $v \in V$ platí

$$f(b \star v) = f\big((a \star \overrightarrow{ab}) \star v\big) = f\big(a \star (\overrightarrow{ab} + v)\big) = \overrightarrow{ab} + v = f(b) + \mathrm{id}(v).$$

Nechť $v \in V$ je libovolný bod afinního prostoru $(V, V, +)$, pak $f(a + v) = v$ a tedy f je surjekce. Nechť pro $b, c \in A$ platí $f(b) = f(c)$. Pak ale $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ac}$, podle podmínky

(ii) z ekvivalentní definice afinního prostoru je $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$ a tedy $\overrightarrow{bc} = 0$. To podle podmínky (i) zmíněné ekvivalentní definice znamená $b = c$.

Tedy f je také injektivní, čímž je důkaz ukončen. □

Důsledek. *Každý afinní podprostor ve $(V, V, +)$ je tvaru $f^{-1}(w)$ pro vhodné lineární zobrazení $f : V \to W$ a $w \in \operatorname{Im} f$.*

Poznámka. Povšimněme si, že afinních isomorfismů konstruovaných v důkazu předchozí věty je právě tolik, jako bodů afinního prostoru $(A, V, \star)$. Promyslete si, že jejich inverzní zobrazení odpovídají posunutí nuly vektorového prostoru V do příslušného pevně zvoleného bodu $(A, V, \star)$. Afinních isomorfismů je ovšem podstatně více, neboť podřízeným lineárním zobrazením posunutí je vždy identita.

Cvičení. Dokažte, že postačující podmínkou pro to, aby afinní zobrazení bylo afinním isomorfismem, je to, že podřízené lineární zobrazení je lineární isomorfismus. (Povšimněte si, že v jednom z předešlých cvičení už bylo dokázáno, že jde o podmínku nutnou.)

Důsledek. *Afinní prostory stejné dimenze jsou isomorfní.*

Pro konečné množiny a konečné afinní prostory plyne z věty následující důležitý

Důsledek. *Na konečné množině lze definovat afinní strukturu právě tehdy, pokud je počet jejích prvků tvaru p^n, kde p je prvočíslo a $n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Víme, že každý vektorový prostor V nad polem $\mathbb{K}$ je isomorfní vektorovému prostoru $\mathbb{K}^{\dim V}$. Konečná pole jsou však právě tvaru $\mathbb{Z}_p[\alpha]$ o p^m prvcích, tedy počet prvků vektorového prostoru musí být p^n pro $n = m \cdot \dim V$. □

4. Afinní báze. Afinní grupa.

Definice. Nechť $(A, V, \star)$ je afinní prostor dimenze n, $(v_1, \dots, v_n)$ báze V a $a \in A$ libovolný bod. Pak $(n+1)$-tici $(a, v_1, \dots, v_n)$ nazveme *afinní bazí* (případně *afinním repérem*) prostoru $(A, V, \star)$. Bod a někdy nazýváme *počátečním bodem* afinní báze.

Lemma. *Nechť $(a, v_1, \dots, v_n)$ je afinní bazí $(A, V, \star)$. Pak pro každý bod $b \in A$ existuje právě jedna n-tice skalárů $(c_1, \dots, c_n)$ tak, že*

$$b = a \star (c_1 v_1 + \dots c_n v_n).$$

Důkaz. Plyne z jednoznačnosti vektoru $\overrightarrow{ab}$ a jednoznačnosti souřadnic $\overrightarrow{ab}$ vzhledem k bázi $(v_1, \dots, v_n)$. □

Definice. Nechť $(A, V, \star)$ je afinní prostor dimenze n. *Afinními souřadnicemi* bodu $b \in A$ vzhledem k afinní bázi $(a, v_1, \dots, v_n)$ rozumíme sloupcový vektor $(1, c_1, \dots, c_n)^\top$, kde $(c_1, \dots, c_n)$ představuje jednoznačně danou n-tici skalárů z předchozího lemmatu.

Přestože následující výklad je možné vést pro obecný afinní prostor, budeme se věnovat takřka výhradně prostorům tvaru $(V, V, +)$. Čtenářům doporučujeme, aby se pokusili přeformulovat ta tvrzení, u kterých to má smysl, do obecnější podoby.

Příklad 23. Nechť v afinním prostoru $(V, V, +)$ je zvolena libovolná báze $(a, v_1, \dots, v_n)$ a bod $b \in V$ má souřadnice $(1, c_1, \dots, c_n)^\top$. Pak zřejmě platí

$$b = \begin{pmatrix} a & v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

kde řádkový vektor afinní báze chápeme jako matici $1 \times (n+1)$ a sloupcový vektor souřadnic jako matici $(n+1) \times 1$.

Nechť dále $(W, W, +)$ je další afinní prostor s bazí $(b, w_1, \dots, w_k)$ a $f : V \to W$ afinní zobrazení. Pak podřízené lineární zobrazení ϕ má matici $(\phi)_{\beta\alpha}$, kde $\alpha = (v_1, \dots, v_n)$ je báze zaměření $(V, V, +)$ a $\beta = (w_1, \dots, w_k)$ je báze zaměření $(W, W, +)$. Přitom platí, že souřadnice bodu $f(b) \in W$ tvoří sloupcový vektor

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline f(0) & (\phi)_{\beta\alpha} \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

kde $(1, c_1, \dots, c_n)^\top$ jsou souřadnice $b \in V$ vzhledem k afinní bázi $(a, v_1, \dots, v_n)$.

Příklad 24. Nechť V je vektorový prostor nad polem $\mathbb{K}$ dimenze n. S využitím předchozího příkladu popíšeme všechny afinní automorfismy afinního prostoru $(V, V, +)$ se zvolenou bazí. V případě automorfismu je matice podřízeného lineárního zobrazení čtvercová a navíc regulární, tedy všechny afinní automorfismy jsou tvaru

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline r & A \end{array}\right); r \in \mathbb{K}^n, A \in GL(n, \mathbb{K}) \right\}.$$

Označme tuto množinu $A(n, \mathbb{K})$. Je zřejmé, že $A(n, \mathbb{K})$ obsahuje jednotkovou matici $(n+1) \times (n+1)$. Dále

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline r & A \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline s & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline r + As & AB \end{array}\right),$$

tedy $A(n, \mathbb{K})$ je uzavřena na součin. Konečně

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -A^{-1}r & A^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline r & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -A^{-1}r + A^{-1}r & A^{-1}A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & E \end{array}\right)$$

a tedy

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -A^{-1}r & A^{-1} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline r & A \end{array}\right).$$

Definice. Množina $A(n, \mathbb{K})$ s operací násobení matic se nazývá *afinní grupa.*

Cvičení. Afinní grupa $A(n, \mathbb{K})$ je podgrupou $GL(n+1, \mathbb{K})$. Rozhodněte, zda jde o normální podgrupu, v případě, že ano, spočtěte faktorovou grupu $GL(n+1, \mathbb{K})/A(n, \mathbb{K})$.

Příklad 25. Buď V vektorový prostor dimenze n nad polem $\mathbb{K}$. Pak afinní grupa $A(n,\mathbb{K})$ operuje na množině afinních bazí prostoru $(V,V,+)$ v tomto smyslu: Akce

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline r & A \end{array}\right) \in A(n,\mathbb{K})$$

na $(a, v_1, \dots, v_n)$ je dána násobením zprava, tedy

$$\begin{pmatrix} a & v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline r & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a + r_1 v_1 + \dots + r_n v_n & (v_1, \dots, v_n) \cdot A \end{array}\right)$$

Operace $A(n,\mathbb{K})$ na množině afinních bazí $(V,V,+)$ má následující smysl: nechť $B \in A(n,\mathbb{K})$ je libovolná a $(a, v_1, \dots, v_n)$ je libovolná afinní báze, nechť $v \in V$ je libovolný bod se souřadnicemi $(1, c_1, \dots, c_n)^\top$ vzhledem k bázi $(a, v_1, \dots, v_n)$. Pak platí, že

$$B^{-1} \cdot (1, c_1, \dots, c_n)^\top$$

jsou souřadnice v vzhledem k bázi $(a, v_1, \dots, v_n) \cdot B$, tedy v bázi změněném akcí $B \in A(n,\mathbb{K})$. Skutečně,

$$v = (a, v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (a, v_1, \dots, v_n) \cdot B \cdot B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Pro lepší pochopení si uvědomte, jakým způsobem se mění souřadnice ve vektorovém prostoru při změně báze.

Povšimněte si také, že báze zaměření $(v_1, \dots, v_n)$ je změněna akcí matice $A \in GL(n,\mathbb{K})$ — uvědomte si, že pro $r = 0 \in \mathbb{K}^n$ se nemění počáteční bod afinní báze a akce $A(n,\mathbb{K})$ splývá s akcí $GL(n,\mathbb{K})$ na zaměření.

Příklad 26. Afinní báze umožňuje výhodný popis afinního podprostoru ve $(V,V,+)$. Nechť $(A,W,+)$ je afinní podprostor, tedy $A \subseteq V$, $W \subseteq V$ je vektorový podprostor. Nechť $(v_1, \dots, v_k)$ je báze W a $a \in A$ libovolný bod. Pak

$$A = \{a + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k; t_i \in \mathbb{K}\}.$$

Tomuto zápisu afinního podprostoru ve $(V,V,+)$ říkáme *parametrické zadání.* Protože

$$W = \{t_1 v_1 + \dots + t_k v_k; t_i \in \mathbb{K}\},$$

je dobře vidět, že A a W jsou rovnoběžné podprostory ve $(V,V,+)$, které splývají právě tehdy, pokud $0 \in A$.

Přitom víme, že každý vektorový podprostor je řešení homogenní soustavy rovnic, tedy že existuje matice M typu $(n-k) \times n$ tak, že $W = \{x \in V; Mx = 0\}$. Pak ale lze A popsat jako množinu $A = \{x \in V; Mx = b\}$, kde $b \in \mathbb{K}^k$ je splňuje $b = M \cdot a$. Tomuto zápisu afinního podprostoru říkáme *impklicitní zadání.*

Cvičení. Je snadné z implicitního zadání afinního podprostoru vypočítat jeho parametrický tvar, určený afinní bazí. Rozmyslete si, zda umíte k parametrickému zadání najít příslušnou nehomogenní soustavu lineárních rovnic jeho implicitního zadání.

Definice. Nechť V je vektorový prostor a U jeho podprostor. Pak *faktorovým prostorem* V/U rozumíme množinu

$$V/U = \{v + U; v \in V\}/\sim,$$

kde $v + U \sim w + U$ právě tehdy, když $v - w \in U$, s operacemi

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U$$
$$c \cdot (v + U) = (c \cdot v) + U$$

Cvičení. Uvědomte si, že $v + U = \{v + u; u \in U\}$ a že specielně $0 + U = U$, tedy můžeme považovat U za prvek V/U. Rozmyslete si smysl jednotlivých symbolů $+$ v definici operací na faktorovém prostoru V/U a dokažte, že V/U je vektorový prostor.

Cvičení. Uvědomte si, že prvky faktorového prostoru V/U jsou afinní prostory. Povšimněte si, že každý z těchto afinních podprostorů je rovnoběžný s U. Skutečně, je-li U určeno soustavou $Mx = 0$ a $\dim U = k$, pak pro každé $v \in V$ je množina $v + U$ zadána nějakou nehomogenní soustavou $Mx = b$ pro vhodné $b \in \mathbb{K}^{n-k}$.

Nyní mějme afinní prostor $(A, V, \star)$ dimenze n a jeho bázi $(a, v_1, \dots, v_n)$. Uvědomte si, že afinní báze urcuje $(n+1)$-tici bodů a, $a_1 = a \star v_1$, $\dots$,$a_n = a \star v_n$. To nám umožní jiný způsob popisu afinního prostoru a afinní grupy.

Definice. Nechť $(A, V, \star)$ je afinní prostor dimenze n. Řekneme, že body a_1, $\dots$, a_k jsou *v obecné poloze*, pokud jsou vektory $\overrightarrow{a_1a_2}$, $\dots$, $\overrightarrow{a_1a_k}$ lineárně nezávislé.

Povšimněte si, že vektorový prostor generovaný vektory $\overrightarrow{a_1a_2}$, $\dots$, $\overrightarrow{a_1a_k}$ má dimenzi nejvýše $k-1$ a tuto dimenzi nabyde právě v případě, že a_1, $\dots$, a_k jsou body v obecné poloze.

Platí tedy

Věta. *Nechť $(a, v_1, \dots, v_n)$ je afinní báze afinního prostoru $(A, V, \star)$. Pak body a, $a \star v_1$, $\dots$, $a \star v_n$ jsou v obecné poloze. Nechť naopak $b_0, \dots, b_n \in A$ jsou body v obecné poloze. Pak $(b_0, \overrightarrow{b_0b_1}, \dots, \overrightarrow{b_0b_n})$ je afinní bazí $(A, V, \star)$.*

Cvičení. Dokažte předchozí větu.

Definice. Vzhledem k předchozí větě budeme nazývat množinu $(\dim V) + 1$ bodů afinního prostoru $(A, V, \star)$ v obecné poloze *bodovou bazí* afinního prostoru $(A, V, \star)$.

Příklad 27. Na určení přímky v $\mathbb{R}^n$ je potřeba dvou různých bodů, přitom přímka je jednorozměrným afinním podprostorem, podobně na rovinu je potřeba tří různých bodů neležících v přímce atd.

Nyní má smysl přeformulovat pojem souřadnic také vzhledem k bodové bázi. Mějme afinní prostor $(A, V, \star)$ dimenze n a jeho bodovou bázi $(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Označme $v_1 = \overrightarrow{a_0a_1}$, $\dots$, $v_n = \overrightarrow{a_0a_n}$. Pak $(a_0, v_1, \dots, v_n)$ je podle předchozí věty afinní bazí $(A, V, \star)$.

Uvažme $(n + 1)$-tici skalárů $(c_0, \dots, c_n)^\top \in \mathbb{K}^{n+1}$ takovou, že $\sum_i c_i = 1$.

Formálním zápisem

$$b = c_0 \cdot a_0 + c_1 \cdot a_1 + \dots + c_n \cdot a_n \tag{10}$$

budeme rozumět bod

$$b = a_0 \star (c_1 v_1 + \dots c_n v_n).$$

Tento zápis lze chápat následovně. Protože $c_0 = 1 - c_1 - \dots - c_n$, máme

$$\begin{aligned} b &= (1 - c_1 - \dots - c_n)a_0 + c_1 a_1 + \dots + c_n a_n \\ &= a_0 + c_1(a_1 - a_0) + \dots + c_n(a_n - a_0) \end{aligned}$$

a tato formální lineární kombinace znamená to, že v afinní bázi $(a_0, v_1, \dots, v_n)$ má bod b souřadnice $(1, c_1, \dots, c_n)^\top$.

Definice. Nechť $(a_0, \dots, a_n)$ je bodová báze $(A, V, \star)$. *Bodovými souřadnicemi* bodu $b \in A$ nazveme $(n+1)$-tici skalárů $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ takovou, že $\sum_i c_i = 1$ a

$$b = c_0 a_0 + \dots + a_n c_n.$$

Formální zápis (10) se někdy nazývá *afinní kombinace* bodů a_0, ..., a_n.

Poznamenejme, že v případě $(V, V, +)$ afinní kombinace představují skutečný součet vektorů.

Cvičení. Dokažte s využitím předchozí věty a definic afinní a bodové báze, že bodové souřadnice jsou určeny jednoznačně.

Důsledek. *Každý bod b v $(A, V, \star)$ lze jednoznačně vyjádřit jako afinní kombinaci bodové báze.*

Příklad 28. Mějme trojici bodů $a = (0, 0, 1)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (1, 0, 0)$ v $\mathbb{R}^3$. Popište pomocí afinních kombinací všechny body přímky určené body a a b, potom všechny body roviny určené a, b a c. Specielně si uvědomte, jaké v těchto bodových bazích mají souřadnice jednotlivé body a, b a c, dále středy úseček mezi nimi a těžiště trojúhelníku, který tvoří.

Cvičení. Nechť $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ je bodová báze afinního prostoru $(A, V, \star)$. Ukázali jsme, že $(a_0, \overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_n})$ je afinní báze. Dokažte, že též

$$(a_i, \overrightarrow{a_i a_0}, \dots, \overrightarrow{a_i a_{i-1}}, \overrightarrow{a_i a_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{a_i a_n})$$

je afinní báze pro $i = 1, \dots, n$. Jinak řečeno, nezáleží na tom, který bod a které vektory do afinní báze vybereme.

Příklad 29. Dosud jsme konstruovali pouze afinní kombinace bodů v obecné poloze. Zkusme nyní uvažovat množinu libovolných bodů $S = \{a_1, \dots, a_k\}$ v $(A, V, \star)$. Nechť $(c_1, \dots, c_k)^\top$ je n-tice skalárů, přičemž $\sum c_i = 1$. Pak $b = c_1 a_1 + \dots + c_k a_k$ je bodem $(A, V, \star)$ a jediná odlišnost od afinní kombinace bodů v obecné poloze je v tom, že souřadnicové vyjádření bodu b vzhledem k množině S nemusí být jednoznačné. Skutečně, přidejme k bodům z příkladu 28 ještě $d = (1, 1, -1)$, který leží v rovině určené a, b a c. Uvědomte si, jaké souřadnice má bod d vzhledem k bodové bázi této roviny tvořené (a, b, c) a promyslete si tvar bodových „souřadnic“ bodů v rovině určené množinou $S = \{a, b, c, d\}$.

Definice. Nechť $S \subseteq A$ je libovolná množina bodů afinního prostoru $(A, V, \star)$. Množinu

$$\mathrm{Af}(S) = \left\{ \sum c_i a_i; c_i \in \mathbb{K}, a_i \in S \right\}$$

všech konečných afinních kombinací bodů z S nazveme *afinní obal* množiny S.

Cvičení. Dokažte, že $\mathrm{Af}(S)$ je nejmenší afinní podprostor v $(A, V, \star)$, který obsahuje množinu S. Uvědomte si především, že afinní obal bodu je daný bod samotný a že afinní obal k bodů v obecné poloze má dimenzi $k-1$, viz též příklad 27.

V části definující afinní podprostor jsme ukázali, že neprázdný průnik afinních podprostorů je afinní podprostor. Pojem afinního obalu umožňuje definovat další operaci s podprostory.

Definice. Nechť $(B, W, \star|W)$,$(C, U, \star|U)$ jsou afinní podprostory v $(A, V, \star)$. Nechť $\mathrm{Af}_\star(S)$ označuje afinní obal množiny S vzhledem k akci $\star$. Připomeňme, že součet $W+U$ je definován jako lineární obal $\mathrm{Lin}(W \cup U)$. Pak $(\mathrm{Af}_\star(B \cup C), W+U, \star|W+U)$, nazveme *součet afinních podprostorů* $(B, W, \star|W)$ a $(C, U, \star|U)$. Stručně budeme součet zapisovat $(B+C, W+U, \star|W+U)$.

Cvičení. Promyslete si, jak vypadá součet afinních podprostorů, především popište akci $\star|W+U$. Dokažte, že jde o afinní podprostor a určete jeho dimenzi (uvědomte si vlastnosti dimenze součtů a průniků vektorových podprostorů).

Podívejme se nyní na afinní obal množiny bodů trochu jinak. Z definice afinního obalu plyne, že s každou dvojicí bodů patří do afinního obalu i přímka, která jimi prochází. To připomíná jinou důležitou geometrickou strukturu.

Definice. Nechť $(A, V, \star)$ je afinní prostor a $a_1, \ldots, a_k \in A$ jsou libovolné body. Afinní kombinaci $c_1 a_1 + \ldots c_k a_k$ nazveme *konvexní kombinací* bodů $a_1, \ldots, a_k$, pokud platí $0 \leq c_i \leq 1$ pro každé $i = 1, \ldots, k$.

Poznamenejme, že konvexní kombinace je též afinní kombinací, tedy platí $\sum c_i = 1$.

Definice. *Konvexní podmnožina* afinního prostoru je taková jeho neprázdná podmnožina, do níž patří s každými dvěma body i úsečka, která je spojuje.

Cvičení. Pokuste se definovat pojem konvexního obalu množiny bodů podobně, jako je definován afinní obal. Dokažte, že konvexní obal množiny $S \subseteq A$ v $(A, V, \star)$ je nejmenší konvexní množina, která obsahuje S.

Cvičení. Procvičte právě zavedené pojmy konvexní podmnožina, konvexní kombinace a konvexní obal na obdobě příkladů 28 a 29.

Příklad 30. Pomocí bodové báze a afinních kombinací lze přeformulovat také definici afinního zobrazení.

Nechť $(A, V, \star)$ a $(B, W, *)$ jsou afinní prostory, $f : A \to B$ afinní zobrazení. Pak platí podle definice, že pro každé $a \in A$ a každé $v \in V$ je

$$f(a \star v) = f(a) * \phi(v),$$

kde $\phi : V \to W$ je lineární zobrazení.

Nechť je afinní kombinací bodů $a_0, \dots, a_k$, tedy $a = c_0a_0 + \dots + c_ka_k$ pro vhodná $c_0, \dots, c_n$, $\sum c_i = 1$.

Pak platí

$$\begin{aligned} f(a) &= f\big(a_0 \star (c_1\overrightarrow{a_0a_1} + \dots + c_k\overrightarrow{a_0a_k})\big) \\ &= f(a_0) * \phi\big(c_1\overrightarrow{a_0a_1} + \dots + c_k\overrightarrow{a_0a_k}\big) \\ &= f(a_0) * \big(c_1\phi(\overrightarrow{a_0a_1}) + \dots + c_k\phi(\overrightarrow{a_0a_k})\big) \\ &= f(a_0) * \big(c_1\overrightarrow{f(a_0)f(a_1)} + \dots + c_k\overrightarrow{f(a_0)f(a_k)}\big) \\ &= (1 - c_1 - \dots - c_k)f(a_0) + c_1f(a_1) + \dots + c_kf(a_k), \end{aligned}$$

kde poslední výraz představuje afinní kombinaci v $(B, W, *)$.

Tedy afinní zobrazení zachovává afinní kombinace.

Cvičení. Dokažte naopak, že každé zobrazení, které zachovává afinní kombinace, je afinní zobrazení.

Důsledek. *Afinní zobrazení je právě takové zobrazení mezi afinními prostory, které zachovává afinní kombinace bodů.*

Poznámka. S využitím tohoto důsledku lze definovat afinní zobrazení jako zobrazení zachovávající afinní kombinace. Podobně lze též definovat konvexní zobrazení jako zobrazení zachovávající konvexní kombinace. Poznamenejme, že konvexní podmnožiny a konvexní zobrazení jsou důležitá především v teorii minimalizací a obecného matematického programování.

Příklad 31. V příkladu 24 jsme popsali afinní grupu jakožto grupu všech afinních automorfismů vektorového prostoru $(V, V, +)$ se zvolenou afinní bazí. Zavedeme nyní obdobnou grupu všech afinních automorfismů $(V, V, +)$, ale se zvolenou bodovou bazí, a následně ukážeme, že jsou tyto dvě grupy isomorfní.

Nechť tedy V je vektorový prostor nad polem $\mathbb{K}$ dimenze n a nechť je v něm zvolena libovolná bodová báze. Uvědomte si, že afinní automorfismus musí převádět bodové souřadnice na bodové souřadnice, tedy všechny afinní automorfismy mají čtvercové matice $(n + 1) \times (n + 1)$ hodnosti n takové, že součet řádků je vektor $\mathbb{J} = (1, \dots, 1)$. Formálně lze tedy tuto grupu popsat např. následovně:

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} c_0 & A_0 \\ \hline c & A \end{array} \right); c \in \mathbb{K}^n, c_0 = 1 - \mathbb{J}c, A \in GL(n, \mathbb{K}), A_0 = \mathbb{J} - \mathbb{J}A \right\}$$

Nyní dokážeme, že jde o grupu vzhledem k násobení matic a že je tato grupa isomorfní $A(n, \mathbb{K})$, a to tak, že využijeme bijekce mezi afinními a bodovými souřadnicemi a ukážeme, že G operuje na bodových souřadnicích stejným způsobem jako $A(n, \mathbb{K})$ na afinních souřadnicích. Promyslete si pečlivě, proč je tato metoda důkazu korektní.

Mějme bod $v \in V$ s afinními souřadnicemi $(1, c_1, \dots, c_n)$ vzhledem k pevně zvolené afinní bázi $(a, v_1, \dots, v_n)$ prostoru $(V, V, +)$. Pak zřejmě bod v má bodové souřadnice $(1 - c_1 - \dots - c_n, c_1, \dots, c_n)^\top$ vzhledem k bodové bázi $(a, a + v_1, \dots, a + v_n)$. Označme $c = (c_1, \dots, c_n)^\top$ a pišme bodové souřadnice symbolicky $(1 - \mathbb{J} \cdot c, c)^\top$.

Mějme nyní libovolný prvek

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline r & A \end{array}\right) \in A(n, \mathbb{K}).$$

Pak zřejmě

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline r & A \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ Ac + r \end{pmatrix}$$

Nyní najdeme matici, jejímž násobením se z vektoru bodových souřadnic $(1 - \mathbb{J} \cdot c, c)^\top$ stane vektor $\big(1 - \mathbb{J} \cdot (Ac + r), Ac + r\big)^\top$.

Protože první řádek takové matice lze získat odečtením sumy ostatních řádků od vektoru $\mathbb{J}$, stačí se zaměřit na to, jak vypadá zbylých n řádků. Snadno nahlédneme, že

$$\left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline r & A \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 - c_1 - \cdots - c_n \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ A + (1 - c_1 \cdot - \cdots - c_n) \cdot r \end{pmatrix},$$

kde hvězdičky označují příslušné dopočítané prvky. Je zřejmé, že matici musíme mírně upravit na tvar

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 - \mathbb{J} \cdot r & \mathbb{J} - \mathbb{J} \cdot (A + r \cdot \mathbb{J}) \\ \hline r & A + r \cdot \mathbb{J} \end{array}\right).$$

Uvědomte si především, co se děje se sloupcovými vektory při násobení vektorem $\mathbb{J}$ zleva a zprava a co se stane se čtvercovou maticí při násobení $\mathbb{J}$ zleva.

Nyní si uvědomte, co jsme zatím ukázali. Ke každým afinními souřadnicím v afinní bázi $(a, v_1, \ldots, v_n)$ máme bodové souřadnice v bodové bázi $(a, a + v_1, \ldots, a + v_n)$, přičemž naopak k bodovým souřadnicím v této bázi snadno najdeme zpětně afinní souřadnice. Tedy máme jednoznačnou korespondenci afinních a bodových souřadnic

$$\begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - c_1 - \cdots - c_n \\ c \end{pmatrix}.$$

Dále, ke každému prvku $B \in A(n, \mathbb{K})$ jsme našli odpovídající prvek grupy G, který působí na bodových souřadnicích $(1 - \mathbb{J}c, c)^\top$ tak, že výsledné souřadnice odpovídají ve výše uvedené jednoznačné korespondenci souřadnicím $B \cdot (1, c)^\top$. Tedy jsme získali jednoznačnou korespondenci mezi $A(n, \mathbb{K})$ a G prostřednictvím

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline r & A \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 - \mathbb{J} \cdot r & \mathbb{J} - \mathbb{J} \cdot (A + r \cdot \mathbb{J}) \\ \hline r & A + r \cdot \mathbb{J} \end{array}\right).$$

Tím jsme však ukázali, že G operuje na bodových souřadnicích stejně, jako $A(n, \mathbb{K})$ na afinních souřadnicích, tudíž výše uvedená jednoznačná korespondence prvků grup $A(n, \mathbb{K})$ a G určuje grupový isomorfismus.

Dodejme ještě, že G také operuje na bodových bazích, opět analogicky jako $A(n, \mathbb{K})$ na afinních bazích.

Cvičení. Nechť

$$B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \in A(2, \mathbb{R}).$$

Určete odpovídající matici v G a ověřte si výpočtem na příkladech afinních a bodových souřadnic několika bodů $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, +)$, že rozumíte přiřazením konstruovaným v minulém příkladu.

Cvičení. Nechť ve $(V, V, +)$ je zvolena afinní báze $(a, v_1, \ldots, v_n)$. Uvědomte si, jak se změní důkaz v příkladu 31, pokud budeme uvažovat souřadnice vzhledem k jiné bodové bázi, např. $(a + v_1, \ldots, a + v_n, a)$. Vyřešte předchozí cvičení vzhledem k této bodové bázi.

Cvičení. Popište, jak vypadá akce G na množině bodových bazí. Využijte příklad 25.

Poznámka. Pokud jste dočetli až na toto místo, doporučujeme vám začít znovu. S velkou pravděpodobností jste něco přehlédli nebo nepochopili.

KONEC