

## Projekce

Nechť  $\mathbb{E}_n$  je  $n$ -rozměrný euklidovský prostor,  $U \subseteq \mathbb{E}_n$  jeho podprostor. Víme, že pak existuje právě jedno lineární zobrazení  $p_U : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_n$  takové, že  $p_U|_U = \text{id}_U$  a  $\ker p_U = U^\perp$ . Toto zobrazení nazýváme *ortogonální projekce*. Z definice  $p_U$  okamžitě plyne, že  $\text{Im } p_U = U$ . Protože  $\mathbb{E}_n = U \oplus U^\perp$ , lze každý vektor  $v \in \mathbb{E}_n$  jednoznačně psát jako součet vektorů  $v_1 \in \text{Im } p_U$  a  $v_2 \in \ker p_U$ .

Povšimněte si, že zobrazení  $p_U$  je *idempotentní*, tj. splňuje rovnost

$$p_U \circ p_U = p_U.$$

Skutečně, na  $U$  splývá  $p_U$  s identitou, která je idempotentní, na  $U^\perp$  splývá s nulovým zobrazením, které je také idempotentní.

Využijme tuto vlastnost k zobecnění ortogonální projekce na libovolné vektorové prostory.

**Definice.** Nechť  $V$  je vektorový prostor nad polem  $\mathbb{K}$ . Řekneme, že lineární zobrazení  $P : V \rightarrow V$  je *projekce*, pokud  $P \circ P = P$ .

**Příklad.** Ortogonální projekce této definici zřejmě vyhovuje. Pro libovolné  $V$  je identita na  $V$  projekce, nulové zobrazení je projekce.

**Tvrzení.** Nechť  $V$  je vektorový prostor nad polem  $\mathbb{K}$  a  $P : V \rightarrow V$  projekce. Pak  $V = \text{Im } P \oplus \ker P$ .

*Důkaz.* Buď  $v \in V$  libovolný vektor. Pak  $v = Pv + (v - Pv)$ , přičemž zřejmě  $Pv \in \text{Im } P$  a  $P(v - Pv) = Pv - PPv = Pv - Pv = 0$ , tedy  $v - Pv \in \ker P$ . Nechť  $v \in \text{Im } P \cap \ker P$ , označme  $u \in P^{-1}(v)$  libovolný vzor  $v$ . Pak  $PPu = Pv = 0$ , neboť  $v \in \ker P$ , ale z definice projekce platí  $PPu = Pu = v$ , tedy  $v = 0$  a  $\text{Im } P \cap \ker P = \{0\}$ .  $\square$

Všimněte si, že v důkazu Tvrzení jsme ukázali, že  $P|_{\text{Im } P} = \text{id}_{\text{Im } P}$ . Skutečně, každé  $v \in \text{Im } P$  je tvaru  $v = Pu$  pro vhodné  $u \in V$  a z definice projekce plyne

$$Pv = PPu = Pu = v.$$

Tedy projekce má stejnou vlastnost jako ortogonální projekce — její zúžení na obraz splývá s identitou. Zvolme nyní libovolnou bázi  $\alpha = (v_1, \dots, v_n)$  prostoru  $V$  tak, že  $(v_1, \dots, v_k)$  je báze  $\text{Im } P$  a  $(v_{k+1}, \dots, v_n)$  báze  $\ker P$ . Pak platí

$$(P)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde  $E$  je jednotková matice  $k \times k$ .

Dokázali jsme tak, že Jordanův tvar každé projekce se skládá z bloků  $1 \times 1$  a vlastní čísla jsou 1 nebo 0. Vlastní čísla lze ale spočítat algebraicky přímo z definice: nechť  $\lambda \in \mathbb{K}$  je vlastní číslo  $P : V \rightarrow V$  příslušné vlastnímu vektoru  $v \in V$ , pak

$$\lambda v = Pv = P(Pv) = P\lambda v = \lambda Pv = \lambda^2 v,$$

z čehož plyne  $\lambda^2 = \lambda$  a jedinými idempotentními prvky v poli  $\mathbb{K}$  jsou právě 0 a 1.