Letmý úvod k součinům a součtům

Cílem tohoto textu je doplnění několika podstatných pojmů z teorie kategorií v jednoduchých příkladech z teorie množin a lineární algebry — součinu a součtu a také tenzorového součinu, náznak vysvětlení adjungovaného páru funktorů Hom a $\otimes$, vše bez přesného zavedení pojmu kategorie a funktoru.

1. Součiny a součty množin

Mějme množiny $A = \{a, b\}$ a $X = \{x, y, z\}$. Jejich součinem běžně rozumíme množinu uspořádaných dvojic

$$A \times X = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z)\}.$$

Obecněji mluvíme o součinu systému množin $(A_i)_{i \in I}$, který definujeme předpisem

$$\prod_{i \in I} A_i = \big\{ f : I \to \bigcup \{A_i; i \in I\}; f(i) \in A_i \text{ pro každé } i \in I \big\}. \tag{1}$$

Tuto definici součinu v dalším textu mírně rozšíříme a zpřesníme, výraz (1) budeme nadále nazývat *kartézský součin* systému množin $(A_i)_{i \in I}$.

Cvičení. Uvědomte si, že pro $A_1 = A$ a $A_2 = X$ předchozí obecná definice kartézského součinu platí pro $I = \{1, 2\}$.

Poznámka. V rámci standardních axiomatických teorií množin vyvstává určitý problém s nekonečnými součiny. Je potřeba přidat dodatečný axiom, tzv. *axiom výběru*, aby kartézský součin (1) byl neprázdnou množinou. V tomto textu se tímto problémem nebudeme dále zabývat a odkazujeme na knihu [BŠ], kap. 7, přičemž v lemmatu 7.6. je dokázána ekvivalence axiomu výběru s tím, že každý součin systému neprázdných množin je neprázdná množina. Poznamenejme předem, že v duální situaci součtu množin k žádnému obdobnému problému nedochází.

Uvědomme si nejdříve, že spolu s množinou $A \times X$ uvažujeme též dvě zobrazení $p_1 : A \times X \to A$ a $p_2 : A \times X \to X$ definovaná předpisem $p_1(\alpha, \xi) = \alpha$, $p_2(\alpha, \xi) = \xi$. Těmto zobrazením říkáme *projekce* na první a druhou složku součinu. Podobně v obecném případě máme projekce $p_i : \prod_{i \in I} A_i \to A_i$ splňující $p_i(f) = f(i)$.

Nechť nyní $K = \{k, l, m, n\}$ je další množina a $\pi_1 : K \to A$ a $\pi_2 : K \to X$ jsou zobrazení definovaná předpisem

$$\begin{aligned} \pi_1(k) = \pi_1(l) &= a \\ \pi_1(m) = \pi_1(n) &= b \\ \pi_2(k) = \pi_2(m) &= x \\ \pi_2(l) = \pi_2(n) &= y \end{aligned}$$

Pak lze definovat zobrazení $h_K : K \to A \times X$ takové, že platí $p_i \circ h_K = \pi_i$ pro $i \in \{1, 2\}$.

Cvičení. Určete zobrazení h_K. Rozhodněte, zda může existovat nějaké $\widetilde{h_K} : K \to A \times X$ s touž vlastností, tedy $p_i \circ \widetilde{h_K} = \pi_i$ pro $i \in \{1, 2\}$.

Označme dále symbolem D (jako „devět") množinu $\{1,2,\ldots,9\}$ a definujme $\rho_1 : D \to A$ a $\rho_2 : D \to X$ předpisem

$$\rho_1(i) = \begin{cases} a \text{ pro } i = 1,2,3 \\ b \text{ jinak} \end{cases}$$

$$\rho_2(i) = \begin{cases} x \text{ pro } i = 1,4,7 \\ y \text{ pro } i = 2,5,8 \\ z \text{ pro } i = 3,6,9 \end{cases}$$

Cvičení. Najděte opět $h_D : D \to A \times X$ s vlastností $p_i \circ h_D = \rho_i$ pro $i \in \{1,2\}$. Uvědomte si, že na rozdíl od h_K z minulého příkladu není h_D injektivní, zato je ale surjektivní.

Označme $R = \{r,s,t,u,v,w\}$ další množinu a definujme projekce $\sigma_1 : R \to A$ a $\sigma_2 : R \to X$ předpisem

$$\sigma_1(\gamma) = \begin{cases} a \text{ pro } \gamma = r,s,t \\ b \text{ jinak} \end{cases}$$

$$\sigma_2(\gamma) = \begin{cases} x \text{ pro } \gamma = r,u \\ y \text{ pro } \gamma = s,v \\ z \text{ pro } \gamma = t,w \end{cases}$$

Pak zřejmě $h_R : R \to A \times X$ s vlastností $p_i \circ h_R = \sigma_i$ pro $i \in \{1,2\}$ je bijekce. To především znamená, že $p_i = \sigma_i \circ h_R^{-1}$ pro $i \in \{1,2\}$ a vidíme, že prvky množin R a $A \times X$, které si vzájemně odpovídají prostřednictvím bijekce h_R, se chovají shodně vzhledem k projekcím.

Úvahy, které jsme dosud provedli, vysvětlují, proč má smysl následující

Definice. Nechť I a A_i pro $i \in I$ jsou množiny. *Součinem* systému množin $(A_i)_{i\in I}$ rozumíme dvojici (A,P), kde A je množina a $P = \{p_i : A \to A_i; i \in I\}$ množina zobrazení, s touto univerzální vlastností: pro každou dvojici (B,Q), kde B je množina a $Q = \{q_i : B \to A_i; i \in I\}$ množina zobrazení, existuje jediné zobrazení $h_B : B \to A$ splňující $p_i \circ h_B = q_i$ pro každé $i \in I$

Říkáme, že projekce $q_i : B \to A_i$ se *faktorizuje* přes A jakožto $p_i \circ h_B$.

Cvičení. Rozhodněte a patřičně zdůvodněte, zda $(A \times X, \{p_1,p_2\})$, $(K, \{\pi_1,\pi_2\})$, $(D, \{\rho_1,\rho_2\})$ nebo $(R, \{\sigma_1,\sigma_2\})$ jsou součiny A a X ve smyslu předchozí definice. Platí obecně, že kartézský součin je součin?

Cvičení. V předchozím cvičení jste si patrně povšimli, že součin není určen jednoznačně. Říkáme, že je určen *jednoznačně až na isomorfismus*, či lépe *jednoznačně s přesností pouze až na isomorfismus*. Rozmyslete si, co přesně jednoznačností až na isomorfismus myslíme. Množiny $A \times X$ a R jsou isomorfní (např. prostřednictvím bijekce h_R). Definujme $\tau_1 : R \to A$ a $\tau_2 : R \to X$ předpisem $\tau_1(\gamma) = a$, $\tau_2(\gamma) = x$. Dokažte, že $(R, \{\tau_1,\tau_2\})$ není součinem A a X.

Příklad 1. Dokážeme následující tvrzení: Nechť A_1 má m prvků a A_2 má nd prvků, pak součin A_1 a A_2 má $m \cdot n$ prvků. Při důkazu použijeme pouze definici součinu.

Nechť tedy $A_1 = \{a_1, \ldots, a_m\}$ a $A_2 = \{b_1, \ldots, b_m\}$ a označme jejich součin A s projekcemi $p_1 : A \to A_1$, $p_2 : A \to A_2$. Stačí si uvědomit, že jednoprvkovou množinu $\{x\}$ lze zobrazit na a_1 a b_1, což odpovídá zobrazením $i_1 : \{x\} \to A_1$, kde $i_1(x) = a_1$, $i_2 : \{x\} \to A_2$, kde $i_2(x) = b_1$. Pak ale existuje $h : \{x\} \to A$ tak, že $p_1 \circ h(x) = a_1$ a $p_2 \circ h(x) = b_1$. Tedy dvojice (a_1, b_1) má vzor v A. Musí tedy být vzory pro všechna (a_j, b_k) a tudíž nejméně $m \cdot n$ prvků v A. Kdyby jich bylo více, na některou dvojici (a_j, b_k) by se zobrazovalo více prvků A. Pak by ale příslušná faktorizace $h' : \{x\} \to A$, $p_1 \circ h'(x) = a_j$, $p_2 \circ h'(x) = b_k$, nebyla dána jednoznačně. Tím je důkaz ukončen.

Příklad 2. Uvědomte si podle předešlých cvičení, že definici součinu $(A, \{p_1, p_2\})$ množin A_1 a A_2 lze zachytit diagramem

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
A_1 & & A_2 \\
 & B \arrow[ul, "q_1"] \arrow[ur, "q_2"'] \arrow[uu, dotted, "h_B"] &
\end{tikzcd}
$$

Cvičení. Povšimněte si, že projekce $p_1 : A \times X \to A$ a $p_2 : A \times X \to X$ jsou surjektivní a navíc platí, že $p_1^{-1}(a)$ je v bijekci s X, podobně vzor $b \in A$ je v bijekci s X a vzor každého $\xi \in X$ v zobrazení p_2 je v bijekci s A. Dokažte, že však projekce obecně nemusí být surjektivní. Kdy je projekce také injektivní?

Poznámka. Obecně platí následující tvrzení: Pokud ve struktuře existují kartézské součiny, je každý součin isomorfní kartézskému součinu. Toto tvrzení je zřejmé, přesnější rozbor některých důsledků lze nalézt v [A], 2C7 a 3C2.

Nyní se budeme věnovat důležitému speciálnímu případu součinu systému množin $(A_i)_{i \in I}$. Nechť množina I je prázdná. Má smysl mluvit o součinu prázdného systému? Při rozboru definice součinu zjišťujeme, že ze součinu A prázdného systému nevedou žádné projekce, protože není kam. Zato ale definice vyžaduje, aby pro každou množinu B existovalo právě jedno zobrazení $h_B : B \to A$, bez dalších podmínek. Je možné nalézt množinu A s takovými vlastnostmi?

Definice. O množině $\{z\}$ řekneme, že je *terminální* množinou.

Cvičení. Uvědomte si, že terminální množina je součinem prázdného systému množin.

Součet množin je *duálním pojmem* k součinu. Touto *dualitou* rozumíme to, že všechna zobrazení směřují opačným směrem. Překresleme diagram uvedený v příkladu 2 s „obrácenými“ šipkami:

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dd, dotted, "h^B"] & \\
A_1 \arrow[ur, "j_1"] \arrow[dr, "k_1"'] & & A_2 \arrow[ul, "j_2"'] \arrow[dl, "k_2"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Součtem $A = \{a, b\}$ a $X = \{x, y, z\}$ je pak jejich sjednocení $A \cup X = \{a, b, x, y, z\}$ spolu se zobrazeními $j_1 : A \to A \cup X$ a $j_2 : X \to A \cup X$, která představují vložení podmnožin, tedy $j_1(a) = a$, $j_1(b) = b$, $j_2(x) = x$, $j_2(y) = y$ a $j_2(z) = z$. Uvědomte si, že pro každé B s dvojicí $k_1 : A \to B$ a $k_2 : X \to B$ existuje $h^B : A \times X \to B$ tak, že $h^B \circ j_i = k_i$ pro $i \in \{1, 2\}$.

Cvičení. Přesně zformulujte definici součtu systému množin dualizací definice součinu. Takovéto duální definici součtu říkáme *definice pomocí kouniverzální vlastnosti součtu*. Kolik prvků bude mít podle této definice součet A s A? Dokažte, že $A \cup X$ je skutečně součtem A a X. Popište h^B. Je to jediné zobrazení z $A \times X$ do B s uvedenou vlastností?

Příklad 3. Jedním z mnoha isomorfních součtů systému množin $\{A_i; i \in I\}$ je jejich *disjunktní sjednocení*

$$\coprod_{i \in I} A_i = \bigcup \{A_i \times \{i\}; i \in I\}$$

spolu se zobrazeními $j_i : A_i \to \coprod_{i \in I} A_i$ definovanými předpisem $j_i(\alpha) = (\alpha, i)$ pro $\alpha \in A_i$ a $i \in I$. Vraťte se k předešlému cvičení a ujistěte se, zda jste postupovali správně.

Cvičení. Projděte část týkající se součinů a všechna tvrzení dualizujte i pro součty. Především si uvědomte, že součtem prázdného systému množin (tzv. *iniciální* množinou) je prázdná množina.

2. Součiny a součty struktur

V dalším textu rozšíříme definici součinu a součtu z množin na *struktury*, aniž bychom tento pojem přesně definovali. Strukturou intuitivně rozumějme dodatečnou informaci o množině. Příkladem takové informace je například uspořádání (či jiné relace) nebo uzavřenost množiny na nějaké operace. Strukturou je tedy např. relace uspořádaní na množině, grupa, vektorový prostor. Důležité je, že na rozdíl od množin uvažujeme mezi strukturami pouze některá zobrazení: isotonní zobrazení mezi uspořádanými množinami, homomorfismy mezi grupami, lineární zobrazení mezi vektorovými prostory.

Poznámka. K přesnému porozumění pojmu struktury doporučujeme první kapitolu knihy [A] nebo jakákoli skripta z teorie kategorií, která by v budoucnu napsal prof. Rosický. Čtenář seznámený s teorií kategorií snadno vidí, že pod pojmem struktury rozumíme to, co bývá označováno též jako konkrétní kategorie, tedy kategorii, jejíž objekty mají nosné množiny.

2.1. **Struktura uspořádaných množin.** Definujme na množinách A a X z předchozích příkladů uspořádání $\leq_A$ a $\leq_X$ jako $a \leq_A b$ a $x \leq_X y, z$. Pokusme se nalézt definice součtu a součinu uspořádaných množin tak, aby výsledkem byla opět uspořádaná množina. Věnujme se napřed součinu.

Ze stejných důvodů jako v případě množin je nutné, aby součin uspořádaných množin A a X byla uspořádaná množina se šesti prvky, neboť jednoprvkovou množinu lze vždy chápat jako uspořádanou množinu a projekce z jednoprvkové uspořádané množiny do A a X se musí faktorizovat přes součin (viz příklad 1). Zatímco však všechny šestiprvkové množiny jsou isomorfní, šestiprvkové uspořádané množiny nemusí být isotonně isomorfní. Připomeňme, že zobrazení $f : A \to B$ uspořádaných množin $(A, \leq)$ a $(B, \preceq)$ je *isotonní*, pokud pro každé $a_1 \leq a_2$ je $f(a_1) \preceq f(a_2)$, a f je *isotonní isomorfismus* (nebo též isomorfismus uspořádaných množin), pokud je f bijekce a f i f^{-1} jsou isotonní zobrazení.

Pokusme se tedy definovat na množině $A \times X$ vhodné uspořádání. Už víme, že $A \times X$ s projekcemi p_1 a p_2 popsanými výše je součinem množin A a X. V případě, že pracujeme s uspořádanými množinami, chceme pracovat nikoli s libovolnými zobrazeními, ale se zobrazeními isotonními. Bylo by tedy žádoucí, aby uspořádání na $A \times X$ bylo definováno tak, že p_1 a p_2 budou isotonní.

Nejjednodušším možným uspořádáním, které tuto podmínku splňuje, je identické uspořádání Δ — takto uspořádaná množina se někdy nazývá *protiřetězec* a každé zobrazení z protiřetězce do libovolné uspořádané množiny je isotonní. Je tedy uspořádaná množina $(A \times X, \Delta, \{p_1, p_2\})$ rozumným kandidátem na součin uspořádaných množin $(A, \leq_A)$ a $(X, \leq_X)$?

Uvažme množinu K definovanou výše spolu s uspořádáním $\sqsubseteq$, $k \sqsubseteq l, m \sqsubseteq n$. Povšimněme si, že projekce $\pi_1 : K \to A$ a $\pi_2 : K \to X$ jsou isotonní. Víme, že projekce π_1 a π_2 se faktorizují přes $A \times X$ jako $p_i \circ h_K$. Zobrazení $h_K : K \to A \times X$ ale není isotonní!

Je tedy vidět, že Δ nebylo pro součin vhodné uspořádání. Vhodnější je uspořádání $\leq$ definované $(\alpha_1, \xi_1) \leq (\alpha_2, \xi_2)$ právě tehdy, když $\alpha_1 \leq_A \alpha_2$ a zároveň $\xi_1 \leq_X \xi_2$.

Cvičení. Ověřte, že jde o uspořádání $A \times X$ (tedy že je reflexivní, antisymetrické a tranzitivní). Přesvědčte se, že zobrazení h_K do takto uspořádané množiny $A \times X$ je isotonní. Povšimněte si, že uspořádání $\leq$ je nejmenší takové uspořádání vzhledem k inkluzi. Položme $(\alpha_1, \xi_1) \preceq (\alpha_2, \xi_2)$ pro $(\alpha_1, \xi_1) \leq (\alpha_2, \xi_2)$ a navíc $(a, y) \preceq (b, z)$, pak tranzitivní obal $\preceq$ je uspořádání na $A \times X$ větší než $\leq$ vzhledem k inkluzi. Uvažte, proč je $\leq$ vhodnější uspořádání pro součin $(A, \leq_A)$ a $(X, \leq_X)$ než uspořádání dané tranzitivním obalem $\preceq$.

Cvičení. Pokud jste dobře pochopili předchozí cvičení, mělo by vám být jasné, že jako definici součinu uspořádaných množin lze použít definici součinu množin, v níž každou „množinu“ nahradíme „uspořádanou množinou“ a každé „zobrazení“ nahradíme „isotonním zobrazením“. Přesně zformulujte tuto definici. Uvědomte si, že součin je určen jednoznačně až na isotonní isomorfismus. Dokažte, že $A \times X$ s uspořádáním $\leq$ je součinem $(A, \leq_A)$ a $(X, \leq_X)$.

Poznámka. Povšimněte si, že z definice součinu uspořádaných množin plyne, že pokud „zapomeneme“ na uspořádání, jde o součin příslušných množin. To neplatí obecně, jak uvidíme později.

Cvičení. Pokuste se dualizovat předchozí úvahy až po definici součtu uspořádaných množin. Povšimněte si, že uspořádání součtu je daleko jednodušší než u součinu, jde vlastně jen o (disjunktní) sjednocení relací uspořádání jednotlivých množin.

Jako další cvičení se nabízí zobecnit definici součinu a součtu pro jakoukoli strukturu. Další text bychom tím vlastně nechali na čtenáři. Náš dosud jediný příklad struktur, struktura uspořádaných množin, je však natolik podobný množinám, že si na první pohled nemusíme uvědomit několik podstatných fakt. Především vůbec není jasné, zda v dané struktuře součiny a součty vůbec existují, dále mohl čtenář snadno podlehnout dojmu, že součiny jsou vždy isomorfní kartézskému součinu. Navíc by se mohlo zdát, že součet je podstatně jednodušší než součin. Na závěr této kapitoly proto uvedeme následující příklady.

2.2. **Struktura konečných množin.** Připomeňme, že množina je konečná, pokud není v bijekci s žádnou svou vlastní podmnožinou. Mezi konečnými množinami uvažujeme všechna zobrazení. Ve struktuře konečných množin nejsou součiny ani součty. Skutečně, nechť I je nekonečná množina a $\{A_i; i \in I\}$ libovolný systém konečných neprázdných množin. Pak součin i součet tohoto systému jsou nekonečné množiny, tudíž nepatří do struktury konečných množin. Je zřejmé, že konečné součiny a součty tato struktura má.

2.3. **Struktura lineárně uspořádaných množin.** Připomeňme, že množina $(A, \leq)$ je *lineárně uspořádaná* (též *řetězec*), pokud pro každé $a, b \in A$ platí buď $a \leq b$ nebo $b \leq a$. Mezi lineárně uspořádanými množinami uvažujeme isotonní zobrazení. Tato struktura je na první pohled poněkud matoucí, protože každá lineárně uspořádaná množina je především uspořádaná množina. V této struktuře neexistují součiny ani součty. Na důkaz, že neexistují součty, postačí dvě jednoprvkové množiny $\{a\}$ a $\{b\}$. Jejich součtem musí být dvouprvková množina, protože inkluze do $(\{a, b\}, a \leq b)$ se musí jednoznačně faktorizovat. Množiny $(\{a, b\}, a \leq b)$ a $(\{a, b\}, b \leq a)$ však nejsou isomorfní, tedy součet neexistuje. Důkladně si tento náznak důkazu promyslete a pokuste se ukázat, proč neexistují součiny (zde už nevystačíte s jednoprvkovými množinami — stačí k důkazu dvouprvkové množiny?). Uvědomte si, že jde o důkaz jiného tvrzení, než že kartézský součin lineárně uspořádaných množin není lineárně uspořádaná množina.

2.4. **Struktura pointovaných množin.** *Pointovanou množinou* rozumíme dvojici (A, a), kde A je množina a $a \in A$ její prvek (nazýváme jej *vyznačený prvek*). Znamená to především, že pointované množiny jsou neprázdné. Zobrazení mezi pointovanými množinami jsou *zobrazení zachovávající vyznačený prvek*, tedy $f : (A, a) \to (B, b)$ je zobrazení $f : A \to B$ splňující $f(a) = b$. Poznamenejme, že na strukturu pointovaných množin lze pohlížet jako na algebry s jednou nulární operací, zobrazení zachovávající vyznačený prvek jsou pak jejich homomorfismy. Daleko vhodnější je ale pohled z jiné strany, jako na stukturu abstraktních prostorů, což jsou množiny, u nichž je dodatečná informace dána vybranou podmnožinou potenční množiny (hlubší detaily o abstraktních prostorech lze nalézt v [AKR]).

Ve struktuře pointovaných množin jsou (kartézské) součiny, ale součty nejsou isomorfní disjunktnímu sjednocení. Podrobněji, uvažme pointované množiny (A, a), kde $A = \{a, b\}$, a (X, x), kde $X = \{x, y, z\}$. Kdyby (disjunktní) sjednocení bylo součtem, co by měl být jeho vyznačený prvek? Pokud by jím bylo a, pak by inkluze $X \subseteq A \cup X$ nezachovávala vyznačený prvek, podobně pokud by vyznačeným bodem byl prvek x, nezachovávala by vyznačený prvek inkluze $A \subseteq A \cup X$. Ověřte, že pointovaná množina $(A \vee X, \{a, x\})$, kde $A \vee X = \{b, y, z, \{a, x\}\}$, spolu se zobrazeními $j_1 : A \to A \vee X$ definované předpisem

$$j_1(\alpha) = \begin{cases} \{a, x\} \text{ pro } \alpha = a \\ b \text{ pro } \alpha = b \end{cases}$$

a $j_2 : X \to A \vee X$ definované předpisem

$$j_2(\xi) = \begin{cases} \{a, x\} \text{ pro } \xi = x \\ y \text{ pro } \xi = y \\ z \text{ pro } \xi = z \end{cases}$$

je součtem (A, a) a (X, x).

Uvědomte si, že součet je zadán komutativním diagramem

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ X \arrow[r] & A \coprod X \end{tikzcd} .$$

Čtenář seznámený s teorií kategorií ví, že zobecněním tohoto diagramu (kde na místě $\{*\}$ vystupuje libovolné C) dostaneme definici *push-outu*. Podstatnější je si uvědomit, že v případě součinu existence pevného bodu nehraje velkou roli: je snadné ověřit, že součinem (A, a) a (X, x) je $\big(A \times X, (a, x)\big)$. To plyne z faktu, že u diagramu

$$\begin{tikzcd} A \times X \arrow[r] \arrow[d] & A \\ X & \{*\} \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

nelze o komutativitě smysluplně mluvit. Povšimněte si navíc, že existuje zobrazení $A \times X \to \{*\}$, poněvadž $\{*\}$ je terminálním objektem v množinách, a $\{*\} \to A \times X$, protože $A \times X$ je součin A a X a z $\{*\}$ vedou do A a X projekce.

S úvahami provedenými výše se setkáme ještě dvakrát — předně u algeber (v našem případě abelovských grup a vektorových prostorů), kde uvidíme, že jednotkový prvek grup (resp. nulové prvky vektorových prostorů) se v součtu „slepí“ tak, jako je tomu u pointovaných množin, a dále u příkladu pointovaných metrických prostorů v Dodatku, kde uvidíme, jak vyznačený bod zajistí existenci (nekartézského) součinu.

Cvičení. Spočtěte iniciální a terminální pointované množiny.

Cvičení. Zobecněte strukturu pointovaných množin na strukturu *dvojic množin*, což jsou dvojice (A, A_0) neprázdných množin A a A_0, $A_0 \subseteq A$. V této struktuře uvažujeme zobrazení zachovávající podmnožinu, tedy pro dvojice (A, A_0) a (B, B_0) musí $f : A \to B$ splňovat $f(A_0) \subseteq B_0$.

2.5. **Struktura abelovských grup.** Nechť G a H jsou abelovské grupy, pak lze snadno ověřit, že jejich součinem je kartézský součin $G \times H$ s operací $\cdot$ definovanou po složkách, tedy $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$ pro $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$ a s jednotkovým prvkem $(1_G, 1_H)$, kde $1_G \in G$ a $1_H \in H$ jsou jednotkové prvky grup G a H.

Cvičení. Jak musí vypadat inverzní prvky v $G \times H$? Dokažte, že je $G \times H$ grupa a že je $\cdot$ komutativní.

Projekce $p_1 : G \times H \to G$ a $p_2 : G \times H \to H$ jsou pro takto definované operace na $G \times H$ zřejmě homomorfismy grup.

Naopak disjunktní sjednocení G a H nemá žádnou přirozenou grupovou strukturu, především není podobně jako v případě pointovaných množin jasné, co má být jednotkový prvek. Prozkoumejme situaci na konkrétním případě. Nechť $G = (\{0, a\}, +, 0)$, $H = (\mathbb{Z}_3, +, 0)$ jsou abelovské grupy. Vyjděme z disjunktního sjednocení, v němž podobně jako v předešlém příkladě „slepíme“ jednotkové prvky G a H a vzniklý jednotkový prvek označíme 0. Dostaneme tedy množinu $\{0, a, 1, 2\}$. Na této množině je potřeba definovat strukturu abelovské grupy tak, aby injekce G a H byly grupové homomorfismy a byla splněna příslušná kouniverzální vlastnost. K tomu je nutné přidat další prvky: $a + 1$ a $a + 2$. Označme takto vzniklou množinu $G + H$. Operaci na $G + H$ pišme formálně jako sčítání, přičemž platí všechny relace z grup G a H.

Cvičení. Napište si tabulku operace $+$ na množině $G + H$ a popište injekce $j_1 : G \to G + H$ a $j_2 : H \to G + H$.

Nyní ověříme, že jde o součet G a H. Nechť $(X, +)$ je abelovská grupa a $k_1 : G \to X$ a $k_2 : H \to X$ jsou homomorfismy grup. Nyní musíme definovat homomorfismus $h^X : G + H \to X$ tak, že $k_1 = h^X \circ j_1$ a $k_2 = h^X \circ j_2$ a potom dokázat, že je h^X jediné s touto vlastností. Položme $h^X(a) = k_1(a)$, $h^X(1) = k_2(1)$. Uvědomte si, že a a 1 jsou generátory v $G + H$, tedy každé $g \in G + H$ je tvaru $na + m1$ pro $n = 0, 1$ a $m = 0, 1, 2$ (ověřte podle tabulky operace $\cdot$!). Rozšiřme h^X na celé $G + H$ tak, aby šlo o homomorfismus grup, tedy $h^X(0) = 1_X$ a $h^X(na + m1) = nh^X(a) + mh^X(1)$.

Nyní předpokládejme, že existuje homomorfismus $\widetilde{h^X} : G + H \to X$ tak, že $k_1 = \widetilde{h^X} \circ j_1$ a $k_2 = \widetilde{h^X} \circ j_2$. Pak ale $\widetilde{h^X}(a) = k_1(a) = h^X(a)$ a $\widetilde{h^X}(1) = k_2(1) = h^X(1)$, a protože h^X a $\widetilde{h^X}$ jsou homomorfismy, které se shodují na generátorech, je $\widetilde{h^X} = h^X$.

Dokázali jsme tedy, že $(G + H, \cdot, 0)$ je součtem $(G, +, 0)$ a $(H, +, 0)$.

Zopakujme si obecně postup, kterým jsme součet G a H vytvořili. Nechť $(G, \cdot, 1_G)$ a $(H, \star, 1_H)$ jsou abelovské grupy. Pak jejich součtem je abelovská grupa s nosnou množinou

$$G + H = \{g + h; g \in G, h \in H\}$$

a operací $+$ definovanou

$$(g_1 + h_1) + (g_2 + h_2) = g_1 \cdot g_2 + h_1 \star h_2$$

pro $g_1, g_2 \in G$, $h_1, h_2 \in H$. (Rozmyslete si dobře, jaký je význam jednotlivých znamének plus v definici operace.) Jednotkovým prvkem je $1_G + 1_H$, kde $1_G \in G$ a $1_H \in H$ jsou opět jednotkové prvky grup G a H. Injekce G a H do $G+H$ jsou dány předpisem $j_1(g) = g + 1_H$ pro $g \in G$ a $j_2(h) = 1_G + h$ pro $h \in H$.

Cvičení. Ověřte, že příslušné injekce jsou o grupové homomorfismy a dokažte, že jde skutečně o součet. Prověřte, že naše definice $(G+H, +, 0)$ v příkladu výše odpovídala tomuto obecnému postupu až na drobné přeznačení prvků.

3. Struktura vektorových prostorů. Tenzorový součin.

oučiny a součty vektorových prostorů jsou podobné jako součiny a součty abelovských grup — součinem vektorových prostorů U a V je jejich kartézský součin s operacemi definovanými po složkách a součtem je lineární obal $U \oplus V = \operatorname{Lin} U \coprod V$ spolu s inkluzemi $j_1 : U \to U \oplus V$ a $j_2 : V \to U \oplus V$. Především $U \oplus V$ je vektorový prostor, neboť jde o lineární obal.

Cvičení. Porovnejte součet vektorových prostorů se součtem abelovských grup. Rozmyslete si dobře, jak vypadají operace sčítání a násobení skalárem v $U \oplus V$.

Cvičení. Nechť $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ je pole skalárů a $A = \mathbb{Z}_2^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ a $B = \mathbb{Z}_2$ jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Popište součin a součet A a B, namalujte si A, B, $A \times B$ a $A \oplus B$.

Uvědomte si, že ve cvičení jste ukázali, že $A \oplus B$ má nad $\mathbb{Z}_2$ dimenzi 3. Součin A a B má také dimenzi 3. Nyní ukážeme obecný vztah mezi součtem a součinem.

Věta. *Nechť U a V jsou vektorové prostory nad polem $\mathbb{K}$. Pak kartézský součin $U \times V$ je isomorfní součtu $U \oplus V$.*

Důkaz. Jen náznak: Vzhledem ke komutativitě lze každý prvek $U \oplus V$ psát jako $u + v$ pro $u \in U$ a $v \in V$. Přiřaďme prvku $u + v$ dvojici (u, v). Ověřte, že toto přiřazení je hledaný isomorfismus. $\square$

Poznámka. Uvědomte si, že předchozí tvrzení lze indukcí rozšířit na součin a součet konečně mnoha vektorových prostorů. Pro součin a součet nekonečně mnoha prostorů však tvrzení neplatí! Důvodem je to, že v součtu vznikají prvky jakožto lineární kombinace, ty jsou však jen konečné. Součet nekonečně mnoha prostorů si lze představit jako podprostor jejich součinu. Dobrým příkladem pro intuitivní vysvětlení je prostor polynomů $\mathbb{R}[x]$: zatímco $\mathbb{R}[x]$ je součtem všech prostorů $\{ax^i; a \in \mathbb{R}\}$ pro $i \in \mathbb{N}$, součinem těchto prostorů je prostor formálních mocninných řad $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots; a_i \in \mathbb{R} \text{ pro } i \in \mathbb{N}\}$.

Cvičení. Zamyslete se nad Problémy k přemýšlení 1 a 2 ke kapitole 5 v [S]. Uvědomte si především, že $U \simeq (U \oplus V)/V$ a pro libovolný podprostor W v U platí $U \simeq W \oplus U/W$.

Vidíme, že konečný součin je „totéž“ jako součet. To je poněkud zvláštní situace, ale je typická pro všechny R-moduly nad komutativním okruhem R. Vraťte se zpět k části 2.5 a uvědomte si, že v abelovských grupách (což jsou přesně $\mathbb{Z}$-moduly) došlo k témuž.

Specielně pro vektorové prostory pak platí, že pro konečněrozměrné prostory U a V je $\dim U \oplus V = \dim U \times V = \dim U + \dim V$. Připomeňme, že pro prostory nad konečným polem je $\operatorname{card} U \times V = \operatorname{card} U \oplus V = \operatorname{card} U \cdot \operatorname{card} V$. Protože však ve struktuře vektorových prostorů je „velikostí“ spíše dimenze než počet prvků, nabízí se přirozená otázka, zda existuje prostor s rozumným vztahem k prostorům U a V, jehož dimenze je součtem dimenzí U a V.

Cvičení. Buď $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$, $U = \mathbb{Z}_2^2$ a $V = \mathbb{Z}_2$ vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Porovnejte počet všech zobrazení z U do V s počtem lineárních zobrazení z U do V. Na množině všech lineárních zobrazení

$$\operatorname{Hom}(U, V) = \{f : U \to V; f \text{ lineární}\}$$

lze definovat strukturu vektorového prostoru předpisem $(c \cdot f + d \cdot g)(u) = cf(u) + dg(u)$ pro $c, d \in \mathbb{K}$ a $f, g \in \operatorname{Hom}(U, V)$. Ujistěte se, zda této struktuře rozumíte. Jaká je dimenze $\operatorname{Hom}(U, V)$? Návod: Uvědomte si, že lineární zobrazení lze reprezentovat maticemi.

Cvičení. Pokuste se předchozí cvičení zobecnit.

Vidíme tedy, že dimenze prostoru $\operatorname{Hom}(U, V)$ má vlastnosti, které jsme požadovali. Nyní ale popíšeme vektorový prostor, který vypadá „víc jako součin“ a jehož dimenze je také součinem dimenzí součinitelů. Na závěr ukážeme jeho vztah k prostoru lineárních zobrazení.

Začněme motivačním příkladem. Víme, že pro libovolné množiny A, B, C, kde A a B jsou neprázdné, platí

$$\left(A^B\right)^C \simeq A^{B \times C}, \tag{2}$$

kde množinou M^N označujeme všechna zobrazení z N do M.

Cvičení. Najděte bijekci mezi výše uvedenými množinami zobrazení.

Přejděme k vektorovým prostorům. Z dimenzních důvodů je zřejmé, že nemůže platit

$$\operatorname{Hom}(W, \operatorname{Hom}(V, U)) \simeq \operatorname{Hom}(W \times V, U). \tag{3}$$

Budeme definovat nový, odlišný „součin“ označený $W \otimes V$ tak, že $\dim W \otimes V = \dim V \cdot \dim W$ a navíc ukážeme, že nahradíme-li tímto novým součinem kartézský součin v pravé straně rovnosti (3), příslušný isomorfismus je velice konkrétní a dobře pochopitelné zobrazení.

Budeme potřebovat následující pojem:

Definice. Nechť $U_1, \ldots, U_n$ a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Řekneme, že zobrazení

$$f : U_1 \times \cdots \times U_n \to V$$

je *multilineární*, pokud pro každé $i = 1, \ldots, n$ je

$$f(u_1, u_2, \ldots, au_i + bu_i', \ldots, u_n) = af(u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots, u_n) + bf(u_1, u_2, \ldots, u_i', \ldots, u_n)$$

pro $u_j \in U_j$ pro $j = 1, \ldots, n$, $u_i, u_i' \in U_i$ a $a, b \in \mathbb{K}$.

Řada příkladů multilineárních zobrazení je v [Č], kap. 4. K našim účelům ale bude stačit věta 4.6 tohoto textu, kterou ovšem použijeme jako definici. Tím ovšem přijdeme o podstatnou část popisu tenzorového součinu a nebudeme schopni formulovat některá tvrzení. Pro naše účely však stačí chápat tenzorový součin jako vektorový prostor. Pro zájemce o hlubší pohled na tenzorový počet odkazujeme na již zmíněnou 4. kapitolu [Č].

Definice. Nechť $U_1, \dots, U_n$ jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Jejich *tenzorový součin* $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ takový, že existuje injektivní multilineární zobrazení $\iota : U_1 \times \cdots \times U_n \to U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ a pro každé multilineární zobrazení $f : U_1 \times \cdots \times U_n \to W$ existuje právě jedno lineární zobrazení $\varphi : U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \to W$ tak, že $f = \varphi \circ \iota$, neboli komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \arrow[r, dotted, "\varphi"] & W \\ U_1 \times \cdots \times U_n \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Prvkům tenzorového součinu říkáme *tenzory*.

Tato definice je opět definicí pomocí univerzální vlastnosti, tak jako u součinu. Povšimněte si především toho, že zvolíme-li postupně za prostor W prostory U_i, faktorizují se přes tenzorový součin projekce z kartézského součinu. Uvědomte si, že i-tou projekci lze chápat jako multilineární zobrazení, které je nulové ve všech složkách kromě i-té. V tomto smyslu je tedy tenzorový součin určitou obdobou součinu.

Cvičení. Pokuste se dokázat, že tenzorový součin je určen jednoznačně až na isomorfismus. Uvědomte si, jakou roli hraje to, že lineární zobrazení $\varphi : U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \to W$ existuje právě jedno.

Vzhledem k jednoznačnosti až na isomorfismus stačí popsat nějaký tenzorový součin. Abychom se vyhnuli definici duálních prostorů, popíšeme tenzorový součin pomocí báze. To bude také nejvhodnější popis pro naše další úvahy. Kvůli jednoduchosti zápisu se omezíme na tenzorový součin dvou vektorových prostorů.

Nechť U a V jsou vektorové prostory, $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$ báze U a $\beta = (v_1, \dots, v_m)$ báze V. Zapišme formálně dvojici (u_i, v_j) symbolem $u_i \otimes v_j$ pro $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, m$. Položme

$$T = \mathrm{Lin}\{u_i \otimes v_j; i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\},$$

kde jednotlivé dvojice $u_i \otimes v_j$ považujeme za lineárně nezávislé. Povšimněte si, že pak prostor T má dimenzi $n \cdot m$.

Definujme nyní zobrazení $\iota : U \times V \to T$ předpisem

$$\begin{aligned} \iota(u, v) &= \iota(a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n, b_1 u_1 + \cdots + b_m v_m) \\ &= a_1 b_1 u_1 \otimes v_1 + a_2 b_1 u_2 \otimes v_1 + \dots a_n b_m u_n \otimes v_m. \end{aligned}$$

Toto zobrazení je zřejmě bilineární (tak označujeme multilineární zobrazení ze součinu dvou prostorů). Zdůrazněme, že $\iota : U \times V \to T$ není lineární zobrazení.

Cvičení. Ověřte, že výše definované $\iota : U \times V \to U \otimes V$ je skutečně bilineární.

Nechť nyní W je libovolný prostor a $f : T \to W$ libovolné bilineární zobrazení. Položme

$$\varphi(u_i \otimes v_j) = f(u_i, v_j)$$

pro $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, m$ a rozšiřme toto zobrazení lineárně na T, tedy pro každé $c, d \in \mathbb{K}$, $k = 1, \dots, n$ a $l = 1, \dots, m$ položme

$$\varphi(cu_i \otimes v_j + du_k \otimes v_l) = c\varphi(u_i \otimes v_j) + d\varphi(u_k \otimes v_l) = cf(u_i, v_j) + d(u_k, v_l).$$

Takto definované zobrazení $\varphi : T \to W$ je nutně lineární a navíc zřejmě $f = \varphi \circ \iota$.

Cvičení. Uvědomte si, že (z dimenzních důvodů) prvek $cu_i \otimes v_j + du_k \otimes v_l \in T$ nemusí mít vzor v zobrazení $\iota : U \times V \to T$. Rozmyslete si, jak vypadá $\operatorname{Im} \iota$.

Aby byl prostor T tenzorovým součinem U a V, je nutné, aby se $f : U \times V \to W$ nefaktorizovalo přes žádné jiné lineární zobrazení než přes $\varphi : T \to W$. Nechť se f faktorizuje přes $\psi : T \to W$. Pak ale ψ splývá s φ na $\operatorname{Im} \iota$, podle předchozího cvičení ale víte, že báze T je obsažena v $\operatorname{Im} \iota$. Z linearity φ a ψ dostáváme $\varphi = \psi$. (Porovnejte tento důkaz s důkazem jednoznačnosti faktorizace u součtu v části 2.5)

Dokázali jsme tedy, že prostor T se zobrazením $\iota : U \times V \to T$ je tenzorovým součinem prostorů U a V.

Nyní popíšeme vztah mezi prostorem lineárních zobrazení a tenzorovým součinem. Chceme dokázat vztah

$$\operatorname{Hom}(W, \operatorname{Hom}(V, U)) \simeq \operatorname{Hom}(W \otimes V, U). \tag{4}$$

Napřed popíšeme ideu důkazu. Prvky prostoru $\operatorname{Hom}(W, \operatorname{Hom}(V, U))$ popíšeme pomocí vhodné báze jako lineární zobrazení, která bázovým vektorům W přiřazují nějaké matice, řekněme i-tému vektoru přiřadíme nějakou matici A_i. Potom zvolíme takové báze prostorů $\operatorname{Hom}(V, U)$ a $W \otimes V$, že matice odpovídajících si zobrazení budou jen přeuspořádáním matic A_i do vhodných rozměrů, přičemž souřadnice vzájemně si odpovídajících prvků budou totožné.

Příklad 4. Nechť $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^4$ a $W = \mathbb{R}^3$ a $f \in \operatorname{Hom}(W, \operatorname{Hom}(V, U))$ je lineární zobrazení, které bázové prvky w_1, w_2 a w_3 prostoru W zobrazuje na matice A, B a C typu 2×4 odpovídající lineárním zobrazením $V \to U$, přičemž matice A má sloupce označené a_1, a_2, a_3, a_4 a podobně B a C. Existuje báze, v níž jsou souřadnice A tvaru

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

a podobně pro matice B a C. Tedy matice zobrazení f je bloková matice

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}$$

Zobrazení f přiřadíme $g \in \operatorname{Hom}(W \otimes V, U)$ takové, že ve vhodné bázi $W \otimes V$ má blokovou matici $(A|B|C)$. Skutečně, to je matice typu 2×12 určující lineární zobrazení $W \otimes V \to U$.

Jak vypadají všechny zmiňované „vhodné báze“? V prostoru matic typu $r \times s$ volíme vždy bázi tvořenou maticemi ze samých nul a jedné jedničky, přičemž tyto matice jsou uspořádány tak, že matice s jedničkou v i-tém sloupci a k-tém řádku předchází matici s jedničkou v j-tém sloupci a l-tém řádku právě tehdy, když $i < j$ nebo $i = j$ a $k < l$. Obecněji, nechť U má bázi $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$, V má bázi $\beta = (v_1, \dots, v_m)$, pak v $\operatorname{Hom}(V, U)$ volíme bázi ze zobrazení, která posílají i-tý bázový vektor na j-tý a vše ostatní na nulu, přičemž tuto bázi uspořádáme analogicky jako v maticích. V tenzorovém součinu prostorů U a V pak volíme bázi

$$(u_1 \otimes v_1, u_1 \otimes v_2, \dots, u_1 \otimes v_m, u_2 \otimes v_1, \dots, u_2 \otimes v_m, \dots, u_n \otimes v_m).$$

Cvičení. Ověřte, že v uvedených bazích mají prvky $\operatorname{Hom}(W, \operatorname{Hom}(V, U))$ a $\operatorname{Hom}(W \otimes V, U)$ skutečně dané souřadnice.

Cvičení. Uvědomte si, že jsme dokázali vztah (4). Volba bazí nehraje roli, neboť tenzorový součin je dán pouze až na isomorfismus. Projděte si celý důkaz a pokuste se jej formálně zapsat. Vraťte se ke cvičení, v němž jste dokazovali vztah (2) a uvědomte si podobnost obou důkazů.

Poznámka. Vztah (4) mezi prostorem lineárních zobrazení hom a tenzorovým součinem, přesněji $\operatorname{Hom}(V, -)$ a $V \otimes -$ je příkladem velice důležitého a obecného vztahu, který se nazývá adjunkcí. K jeho pochopení a k vysvětlení pojmu adjungovaného páru funktorů je však potřeba hlubší teorie popsaná např. v 5. kapitole [A].

Cvičení. Rozmyslete si, že tenzorový součin lze definovat pro jakékoli R-moduly nad komutativním okruhem R (promyslete si potíže v případě nekomutativního R). Pokuste se spočítat tenzorové součiny aditivních grup $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_3$ a obecně $\mathbb{Z}_n$ a $\mathbb{Z}_m$. Vzhledem k příkladu 2.5 víme, že pro abelovské grupy G a H je množina $\operatorname{Hom}(G, H) = \{f : G \to H; f \text{ homomorfismus}\}$ abelovská grupa. Promyslete si vztah (4) pro abelovské grupy. Uvědomte si, že pro R-moduly P, Q nad nekomutativním okruhem R je $\operatorname{Hom}(P, Q)$ jen abelovská grupa a nikoli R-modul.

Dodatek A. Struktura metrických prostorů a metrických prostorů s vyznačeným bodem

V této části ukážeme příklad struktury, kde existují jiné než kartézské součiny. Tento příklad je poněkud technicky náročnější. Pro pochopení dalšího výkladu není nutný a pro první čtení jej doporučujeme přeskočit.

Připomeňme, že *metrický prostor* je množina X spolu se zobrazením $\rho : X \times X \to \langle 0, \infty)$ nazývaným *metrika* a splňujícím pro každé $x, y, z \in X$

(1) $\rho(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$
(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
(3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Prvky metrického prostoru nazýváme *body* a metriku intuitivně chápeme jako vzdálenost mezi body.

Zobrazení, která budeme uvažovat mezi metrickými prostory, se nazývají *kontrakce* (stažení). Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, pak zobrazení $f : X \to Y$ je kontrakce, pokud pro každé $x_1, x_2 \in X$ je splněno $\rho(x_1, x_2) \geq \sigma(f(x_1), f(x_2))$.

Poznámka. Název kontrakce odráží skutečnost, že tato zobrazení nezvětšují vzdálenost mezi body metrických prostorů. Přestože se může na první pohled zdát, že kontrakcí je „málo“, při bližším seznámení s teorií metrických prostorů vysvitne, že ve skutečnosti lze metriku, v níž některé zobrazení není kontrakcí, nahradit jinou, která je „v zásadě stejná“ — např. na množině $A = \{a, b\}$ není mezi metrikou $\rho(a, b) = 1$ a $\sigma(a, b) = 2$ příliš velký rozdíl: body a a b jsou „kousek od sebe“ a bez nějakého absolutního měřítka nemá smysl jejich vzdálenosti v obou metrikách porovnávat mezi sebou. Přesný popis vztahů různých metrik získáme, když popíšeme topologii, která je metrikou určena, což je obsahem většiny standardních textů z funkcionální analýzy i topologie. Další výklad na toto téma není nutný, protože struktura metrických prostorů bude jen vhodným příkladem struktury bez součinů a součtů.

Skutečně, ve struktuře metrických prostorů neexistují součiny ani součty. Ukážeme napřed, že ani dvě jednoprvkové množiny nemají součet. Jednoprvková množina má jednoznačně určenou metriku. Označme $M = \{m\}$ a $N = \{n\}$. Je zřejmé, že součet M a N musí mít alespoň dva body (vložení M a N do (A, ρ), $m \mapsto a$, $n \mapsto b$, se nefaktorizují přes jednoprvkovou množinu). Podobně kvůli jednoznačnosti faktorizace nemůže mít součet více prvků než dva. Pokusme se tedy definovat metriku τ na A tak, aby (A, τ) byla součtem M a N, předpokládejme vložení M a N popsané výše. Nechť tedy $\tau(a, b) = x \in \langle 0, \infty)$. Pak by faktorizací stejné vložení M a N do (A, ξ), kde $\xi(a, b) = 2x$, byla identita $\mathrm{id} : A \to A$, která není kontrakcí.

$$\begin{tikzcd}
\{m\} \arrow[r] \arrow[dr] & \{a\ b\} \arrow[d, dotted, "\mathrm{id}"'] & \{n\} \arrow[l] \arrow[dl] \\
 & \{a\ b\} &
\end{tikzcd}$$

Součet M a N tedy neexistuje.

Interpretace je zřejmá. Metrika definovaná na součtu M a N by musela být taková, jako by M a N byly disjunktně sjednoceny, tedy vzdálenost mezi body m a n by musela být nekonečná. To ale není možné, protože připouštíme pouze konečné vzdálenosti mezi body metrického prostoru.

Podobně se dokáže, že neexistují součiny. Označme pro $n \in \mathbb{N}$ symbolem (A_n, ρ_n) metrické prostory, kde $A_n = \{a, b\}$ a $\rho_n(a, b) = n$. Nechť $(\prod A_n, \rho)$ je součinem přes indexovou množinu $\mathbb{N}$. Najděme prvky $x, y \in \prod A_n$ takové, že $p_n(x) = a$ a $p_n(y) = b$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\{z\}$ je jednobodový metrický prostor. Definujme pro všechna $n \in \mathbb{N}$ zobrazení $q_n : \{z\} \to A_n$ předpisem $q_n(z) = a$ a $r_n : \{z\} \to A_n$ předpisem $r_n(z) = b$. Zřejmě všechna q_n a r_n jsou kontrakce. Z definice součinu existují kontrakce

$h_q : \{z\} \to \prod A_n$ a $h_r : \{z\} \to \prod A_n$, přes která se q_n a r_n faktorizují:

$$\begin{tikzcd} \{z\} \arrow[r, "h_q"] \arrow[dr, "q_n"'] & \prod A_n \arrow[d, "p_n"] & \{z\} \arrow[l, "h_r"'] \arrow[dl, "r_n"] \\ & A_n & \end{tikzcd}$$

Z toho plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $p_n(h_q(z)) = a$ a $p_n(h_r(z)) = b$. Označme $x = h_q(z)$ a $y = h_r(z)$. Kdyby byly všechny projekce p_n kontrakce, pak by pro každé $n \in \mathbb{N}$ platilo

$$\rho(x, y) \geq \rho_n(p_n(x), p_n(y)) = n$$

a to není možné. Tedy ρ není metrika a tudíž součin $\big((A_n, \rho_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ neexistuje.

Uvažme nyní strukturu metrického prostoru s vyznačeným bodem a mezi takovými strukturami uvažujme pouze kontrakce zachovávající pevný bod. Pak především existují součty, což je lehké ukázat: Nechť $(X_i, \rho_i, x_i)_{i\in I}$ je systém metrických prostorů s vyznačeným bodem. Jejich součtem (X, ρ, x) je metrický prostor s vyznačeným bodem $x \in X$, kde (X, x) je součtem systému pointovaných množin $(X_i, x_i)_{i\in I}$. Metriku ρ definujeme takto:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho_i(x, y) \text{ pro } x, y \in X_i \\ \rho(x, x_i) + \rho(y, x_j) \text{ pro } x \in X_i, y \in X_j \end{cases}$$

Je zřejmé, že ρ je metrika na X a že vložení X_i do X je kontrakce.

Nyní ukážeme, že kartézský součin metrických prostorů nemusí být metrický prostor. Uvažme jako výše systém metrických prostorů s vyznačným bodem $(\{a, b\}, \rho_n, a)$, $n \in \mathbb{N}$, kde $\rho_n(a, b) = n$. Uvažme následující prvky $\prod A_n = \big\{f : \mathbb{N} \to \{a, b\}\big\}$: $f_a : \mathbb{N} \to \{a, b\}$, $f_a(n) = a$, je ve všech projekcích vzorem a, přesněji, $(p_n \circ f_a)(m) = a$ pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, podobně $f_b : \mathbb{N} \to \{a, b\}$, $f_b(n) = b$ je vzorem b ve všech projekcích. Předpokládejme, že existuje metrika na $\prod A_n$, označme ji ρ. Pak

$$\rho(f_a, f_b) \geq \rho_n(p_n(f_a), p_n(f_b)) = n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, což není možné.

Cvičení. Projděte si důkaz, že součin metrických prostorů nemusí být metrický prostor. Uvědomte si, v čem se lišil od výše uvedeného důkazu. Povšiměte si, že v kartézském součinu $\prod A_n$ není třeba hledat prvek, který je vzorem a, resp. b, ve všech projekcích — tyto prvky jsou přímo určeny projekcemi a tvarem kartézského součinu.

Nyní ukážeme, že existuje (nekartézský) součin. Nechť I je neprázdná množina, $(A_i, \rho_i, a_i)_{i\in I}$ je systém metrických prostorů s vyznačeným bodem. Definujme na kartézském součinu $\prod A_i$ funkci $\rho : \prod A_i \to \langle 0, \infty \rangle$ předpisem

$$\rho(x, y) = \sup_{i\in I} \rho_i(p_i(x), p_i(y))$$

pro všechna $x, y \in \prod A_i$. Povšimněte si, že ρ splňuje vlastnosti metriky při běžné aritmetice s ∞.

Dokážeme, že množina $A = \{x \in \prod A_i; \rho(x, *) < \infty\}$ spolu s projekcemi $p_i : A \to A_i$, které jsou zúžením projekcí z kartézského součinu na A, je součinem systému $(A_i, \rho_i, a_i)_{i\in I}$, přičemž vyznačeným bodem je vyznačený bod $* \in \prod A_i$ a jako metriku uvažujeme ρ definované výše.

Především $\rho(*, *) = 0 < \infty$ a tedy $* \in A$. Dále (A, ρ) je metrický prostor, neboť ρ na A nenabývá nekonečných hodnot a zřejmě splňuje podmínky (1)–(3) z definice metriky. Z definice suprema dále plyne, že všechny projekce $p_i : A \to A_i$ jsou kontrakce.

Nechť (X, σ, x) je libovolný metrický prostor s vyznačeným bodem a $q_i : X \to A_i$ jsou kontrakce zachovávající vyznačený bod. Musíme dokázat, že existuje jediná kontrakce $h : X \to A$ zachovávající pevný bod taková, že pro každé $i \in I$ je $q_i = p_i \circ h$. Z definice kartézského součinu $\prod A_i$ chápaného jako součin pointovaných množin A_i, $i \in I$, existuje jediné zobrazení $h : X \to \prod A_i$ zachovávající pevný bod. Ukážeme, že obrazem tohoto zobrazení je A a že h chápané jako zobrazení z metrického prostoru (X, σ) do (A, ρ) je kontrakce.

Předpokládejme, že $c \in \prod A_i \setminus A$ je v obraze h, tedy existuje $y \in X$ takové, že $h(y) = c$. Protože pro každé $i \in I$ je $q_i : X \to A_i$ kontrakce, musí platit

$$\sigma(x, y) \geq \rho_i(q_i(x), q_i(y)) = \rho_i(a_i, q_i(y)) = \rho_i(a_i, p_i(h(y)) = \rho_i(a_i, p_i(c)) = \infty,$$

neboť $c \notin A$. To by ale znamenalo, že (X, σ) není metrický prostor, což je spor. Obrazem $h : X \to \prod A_i$ je tedy A a můžeme psát $h : X \to A$.

Z definice A jakožto podmnožiny $\prod A_i$ a z definice $p_i : A \to A_i$ je zřejmé, že nemůže existovat jiné $\widetilde{h} : X \to A$ s vlastností $q_i = p_i \circ \widetilde{h}$ pro všechna $i \in I$.

Nyní ukážeme, že $h : X \to A$ je kontrakce. Nechť $y, z \in X$ jsou libovolná. Pak pro každé $i \in I$ je $\sigma(y, z) \geq \rho_i\big(q_i(y), q_i(z)\big)$, neboť $q_i : X \to A_i$ je kontrakce. Protože však $\rho\big(h(y), h(z)\big)$ je supremem, tedy nejmenší horní závorou, všech $\rho_i\big(p_i(h(y)), p_i(h(z))\big) = \rho_i\big(q_i(y), q_i(z)\big)$, je $\sigma(y, z) \geq \rho\big(h(y), h(z)\big)$, což jsme chtěli ukázat.

Ukázali jsme tedy, že $(A, \rho, *)$ je součinem $(A_i, \rho_i, a_i)_{i\in I}$.

Cvičení. Promyslete si, jak vypadá součin systému $(\{a, b\}, \rho_n, a)$, $\rho_n(a, b) = n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Cvičení. Projděte si znova důkaz tvrzení, že neexistuje součin metrických prostorů. Uvažujte v metrických prostorech $A_n = \{a, b\}$ vyznačený bod a. Rozmyslete si, proč nelze definovat zobrazení $r_n : \{z\} \to A_n$ ve struktuře metrických prostorů s vyznačeným bodem. Uvědomte si, že v tom spočívá důvod, proč existují součiny metrických prostorů s vyznačeným bodem.

Poznámka. V součinu metrických prostorů se mohou vyskytovat body, které jsou od sebe příliš daleko, což je jádrem důkazu, že součin metrických prostorů nemusí existovat. Podobně v kartézském součinu metrických prostorů s vyznačeným bodem mohou existovat body příliš vzdálené od vyznačeného bodu. Jejich vypuštěním ale získáme metrický prostor, přes který se jednoznačně faktorizují projekce z libovolného metrického prostoru, neboť ten žádné body nekonečně vzdálené od vyznačeného bodu neobsahuje. Vidíme tedy, že podobně jako u součtů umožnila existence vyznačeného bodu konstruovat i součiny. Bez vyznačeného bodu nelze říci, které body vypustit, protože nevíme, od čeho by měly být příliš vzdálené.

Reference

[A] Adámek, J., Matematické struktury a kategorie, Matematický seminář SNTL, Praha 1982.

[AKR] Adámek, J., Koubek, V., Reiterman, J., Základy obecné topologie, Matematický seminář SNTL, Praha 1977

[BŠ] Balcar, B., Štěpánek, P., Teorie množin, Academia, Praha 2001 (2.vyd.).

[Č] Čadek, M., Lineární algebra a geometrie III., skripta dostupná na webové stránce autora `http://www.math.muni.cz/~cadek`

[S] Slovák, J., Lineární algebra, skripta dostupná na webové stránce autora `http://www.math.muni.cz/~slovak`